Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 1

Mittwoch

Vortragsübung am Mi 26.10.22, Fr 28.10.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Fubini und Normalbereiche)
Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = y\cos(x^2)$ über dem Bereich

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Aufgabe 2 (Der Satz von Fubini und Normalbereiche)
Wir betrachten die zwei folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos(y)} x^2\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Skizzieren Sie jeweils den Integrationsbereich in der xy-Ebene. Welcher Art von Normalbereich ist der jeweilige Integrationsbereich? Berechnen Sie die Integrale.

Aufgabe 3 (Volumen von Drehkörper)
Es sei $r\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $r(x) = \sin(x)$. Skizzieren Sie den Drehkörper, der bei Rotation des Graphen von r um die x-Achse im xyz-Raum entsteht. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers.

Aufgabe 4 (Kurvenintegrale und Satz von Green)
Berechnen Sie die Rotation der Vektorfelder

(a) $g(x_1,x_2) = (x_2^2\sin(x_1), x_1^2 + \cos(x_2))^{\mathrm{T}}$ (b) $h(x_1,x_2) = (-x_2\sin(x_1), x_2 + \cos(x_1))^{\mathrm{T}}$

sowie die Integrale $\int_{\mathcal{C}} g(x)\bullet\mathrm{d}x$ und $\int_{\mathcal{C}} h(x)\bullet\mathrm{d}x$ längs der parabelförmigen Kurve

$$\mathcal{C} = \{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid -a^2 \leqslant x_1 \leqslant 0,\quad x_1 = -a^2 + x_2^2\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

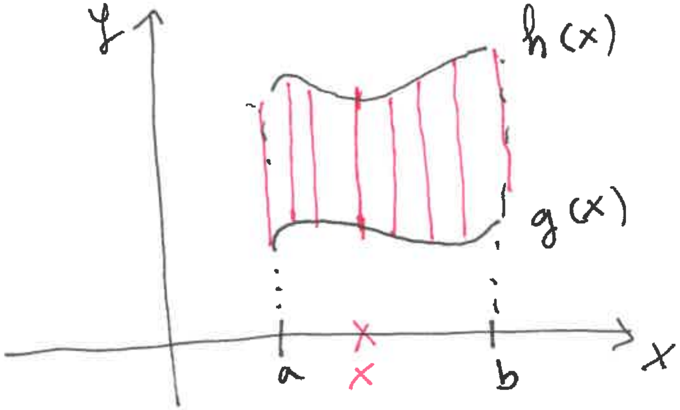
Aufgabe 1

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x,y) = y \cos(x^2).$$
$$(x,y)$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{array} \right\}.$$

Widerholung:

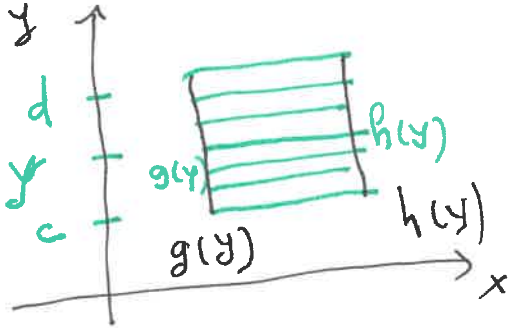
Normalbereich bzgl. $\boxed{\text{x-Achse}}$



$$\boxed{a \le x \le b}$$
$$g(x) \le y \le h(x)$$
$$g, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{array} \right\}$$

Normalbereich bzgl. y-Achse



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} c \le y \le d \\ g(y) \le x \le h(y) \end{array} \right\}$$

$$g, h : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

A1/2

Satz von Fubini (Satz 1.3.4)

$D \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

D Normalbereich bzgl x-Achse

$$= \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$\|$ ← D beides

D Normalbereich bzgl y-Achse

$$\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

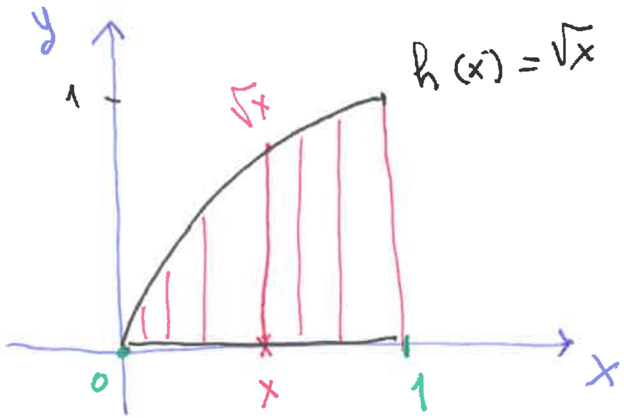
A1/3

$$f(x,y) = \boxed{y\cos(x^2)}.$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ \underbrace{0}_{=g(x)} \le y \le \underbrace{\sqrt{x}}_{=h(x)} \end{array} \right\}.$$

D ist ein Normalbereich bzgl. x-Achse.



Satz 1.3.4 (Fubini)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\cos(x^2) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\cos(x^2) - \frac{0^2}{2}\cos(x^2) \right) dx = \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx = \left[\frac{1}{4}\sin(x^2) \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{4}\sin(1) - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(0)}_{=0} = \frac{\sin(1)}{4}.$$

(4)

A1/4

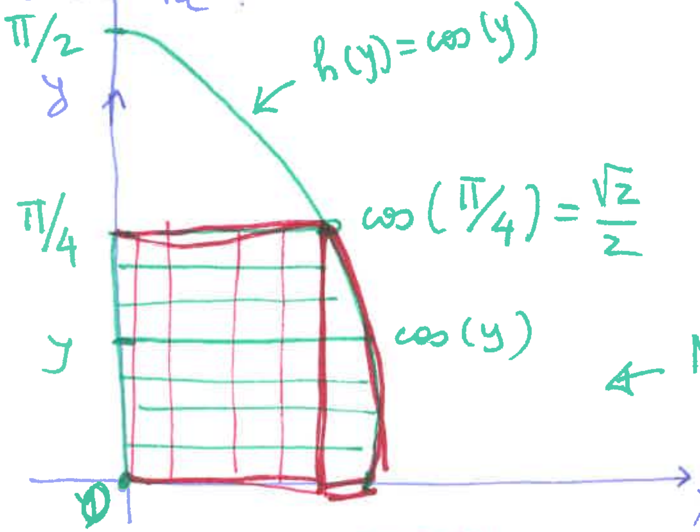
$$\left(\frac{1}{4}\sin(\underline{x^2})\right)' = \frac{1}{4}\cos(x^2)\cdot 2x = \frac{x}{2}\cos(x^2).$$

A2/1

Aufgabe 2:

(a) $$\int_{y=0}^{y=\pi/4}\left(\int_{x=0=g(y)}^{x=\cos(y)=h(y)} x^2 \sin(y)\, dx\right) dy$$

- Skizziere Integrationsbereiche.
- Welcher Art von Normalbereiche!
- Berechne.

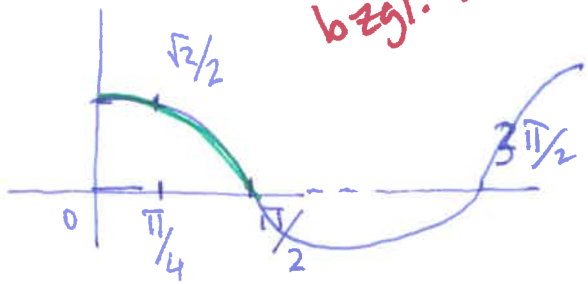


← Normalbereich bzgl. y-Achse.

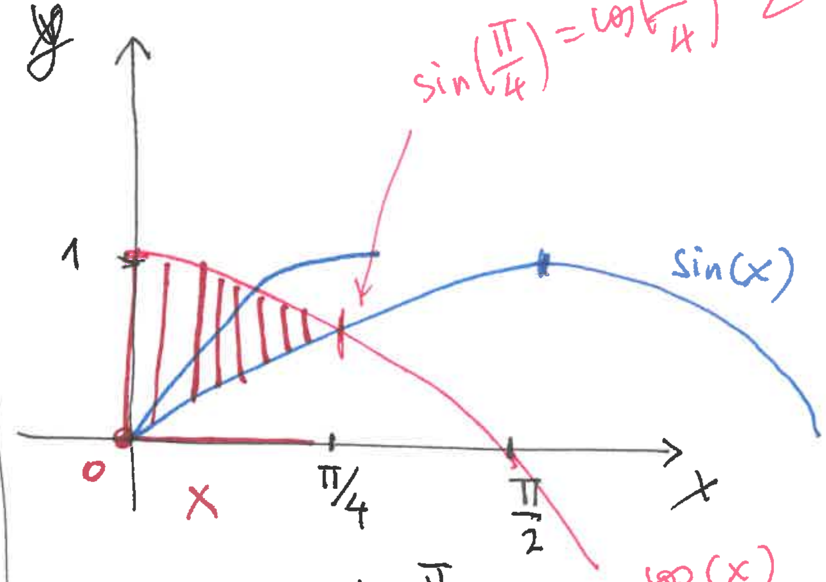
= Vereignigung zweier Normalbereiche bzgl. x-Achse.

$$\boxed{0 \le y \le \frac{\pi}{4}}$$

$$\underset{g(y)}{0} \le x \le \cos(y)$$



(b) $$\int_{x=0}^{x=\pi/4}\left(\int_{y=\sin(x)=g(x)}^{y=\cos(x)=h(x)} x\, y\, dy\right) dx.$$



$$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(x) \le y \le \cos(x)$$

(6) A2/2

(b) $$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \underbrace{\left(\int_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)} x\, y \; dy \right)}_{= \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)}} dx = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(x \frac{\cos^2(x)}{2} - x \frac{\sin^2(x)}{2} \right) dx$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{x}{2} \left(\cos^2(x) - \sin^2(x) \right) = \frac{x}{2} \cos(2x).$$

(a) $$\int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{x=0=g(y)}^{x=\cos(y)=h(y)} x^2 \sin(y)\, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=\pi/4} \left[\frac{x^3}{3} \sin(y) \right]_{x=0}^{x=\cos(y)} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(y)}{3} \underbrace{\sin(y)}_{=(-\cos(y))'} dy = -\frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \cos^3(y) \, (\cos(y))' \, dy$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{\cos^4(y)}{4} \right]_{y=0}^{y=\pi/4} = -\frac{1}{12} \left(\cos^4(\pi/4) - \cos^4(0) \right) = -\frac{1}{12} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{14}$$

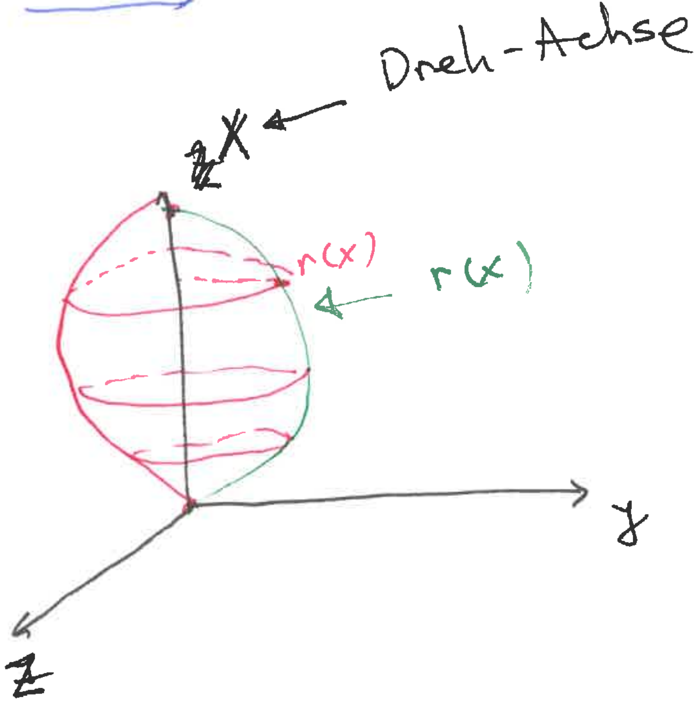
A3/1

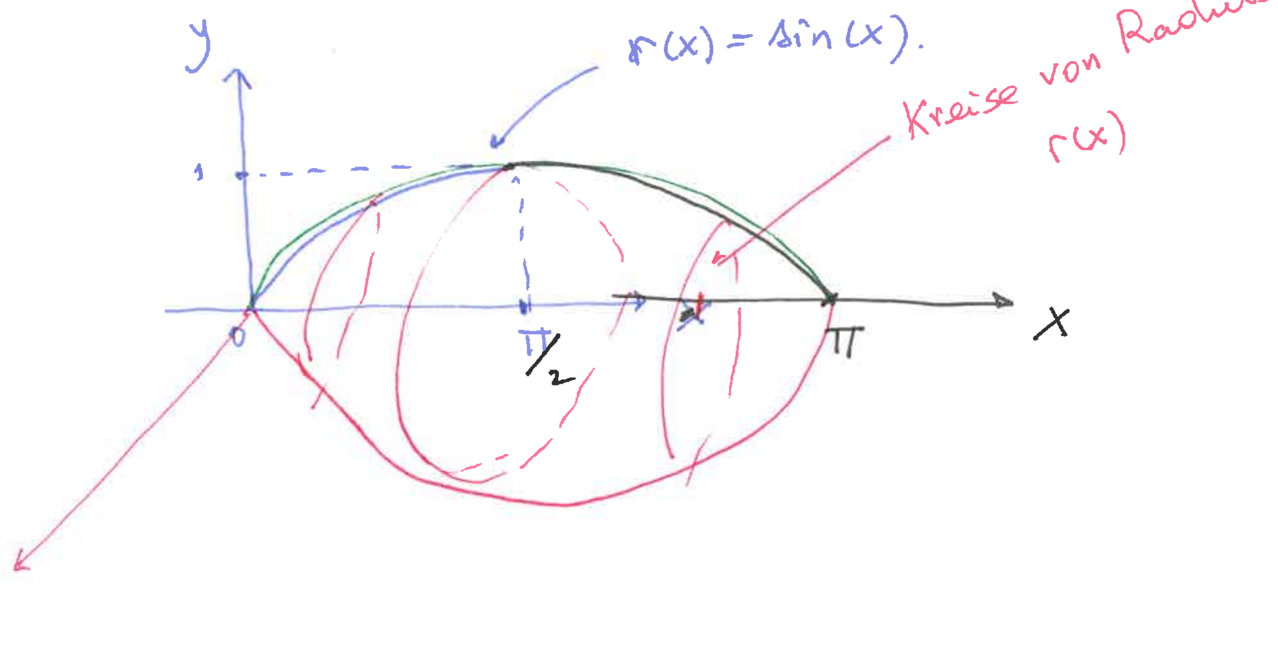
Aufgabe 3 : $r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$r(x) = \sin(x).$$

- Drehkörper : Graph von r um die x-Achse drehen $\hat{=}$ im xyz-Raum.
- Volumen?

Lösung : • Graph von r :





A3/2

Fläche Inhalt = $\pi\, r(x)^2$

Kreis Radius $r(x)$

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_{x=0}^{\pi} r(x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{2} \left(x - \sin(x) \cos(x) \right) \right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$r(x) = \sin(x)$

$$= \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Aufgabe 4

(a) $$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \sin(x_1) \\ x_1^2 + \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

rot(g)

K

$$\int_K g(x) \cdot dx = ?$$

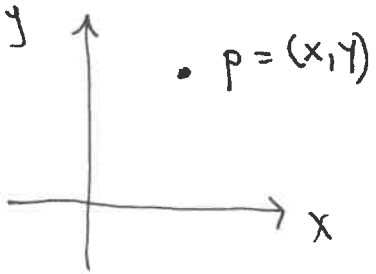
(b) $$h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \sin(x_1) \\ x_2 + \cos(x_1) \end{pmatrix}$$

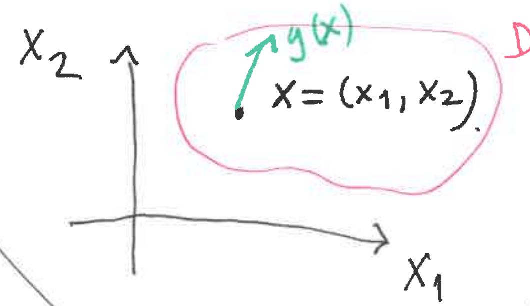
rot(h)

$$\int_K h(x) \cdot dx = ?$$

Bemerkungen

① (x,y)-Koordinaten $\rightsquigarrow$ (x_1, x_2)-Koordinaten





② Vektorfeld in der Ebene (x_1, x_2)-Koordinaten

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ offen

$$(x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

A4/2

Rotation eines Vektorfeldes in $\mathbb{R}^2$

$$g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2) \\ g_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = g(x_1, x_2)$$

<u>Definition</u> $\operatorname{rot}(g) : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{\operatorname{rot}(g)\,(x_1,x_2) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)}$$

Für uns: $g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \sin(x_1) \\ x_1^2 + \cos(x_2) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}(g)\,(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + \cos(x_2)\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2^2 \sin(x_1)\right)$$

$$= 2x_1 - 2x_2 \sin(x_1).$$

b) $h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \sin(x_1) \\ x_2 + \cos(x_1) \end{pmatrix}$.

A4/3 (11)

$$\operatorname{rot} h \; (x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(h_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1).$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2 + \cos(x_1)\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-x_2 \sin(x_1)\right).$$

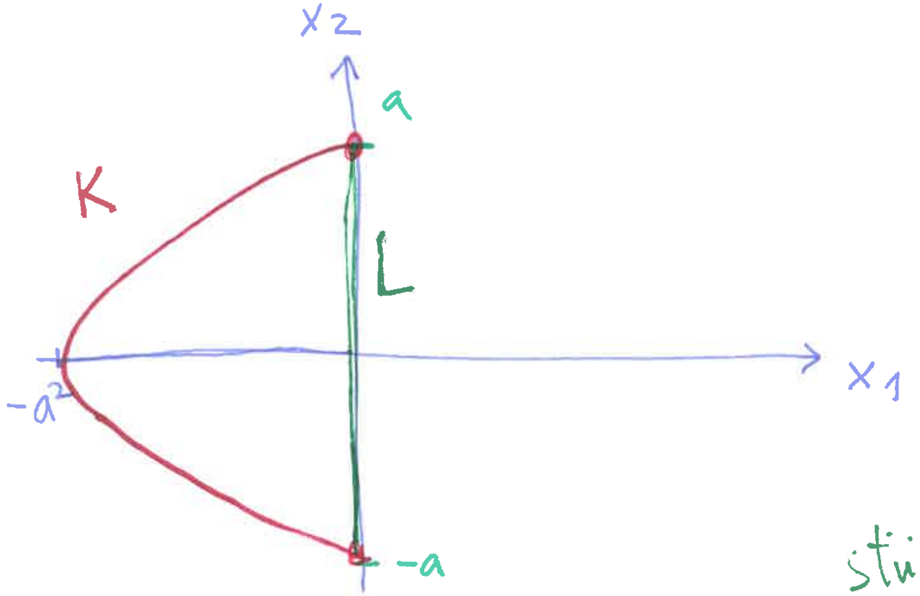
$$= -\sin(x_1) - \left(-\sin(x_1)\right)$$

$$= 0$$

Die Integrale: (a) und (b)

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -a^2 \leq x_1 \leq 0 \\ x_1 = -a^2 + x_2^2 \end{array} \right\} \quad \text{wobei } a > 0$$

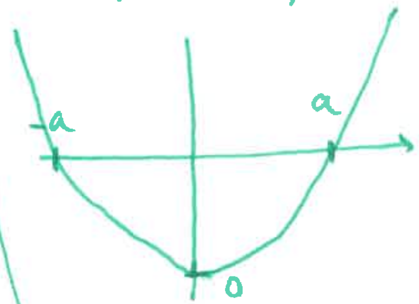
$$\int_K g(x) \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_K h(x) \cdot dx \,.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} -a^2 \leq x_1 \leq 0 \\ x_1 = \underbrace{-a^2 + x_2^2}_{= f(x_2)} \end{array} \right.$$

$f(x) = -a^2 + x^2$

Parabel



stückweise glatt

Kurven → geschlossen: KUL

Kurven → nicht geschlossen: Unsere K

A4/5

HM2: · K eine Kurve

· Finde eine Parametrisierung

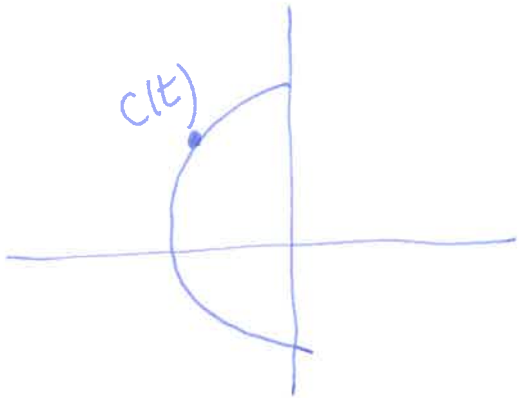
$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$ mit Bild von c genau K.

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \in K.$$

· $$\boxed{\int_K g(x) \cdot dx} \overset{\text{Def}}{=} \boxed{\int_{t=a}^{b} \left(g(c(t)) \cdot c'(t) \right) dt}$$

$$= \int_{t=a}^{b} \left(\begin{pmatrix} g_1(c(t)) \\ g_2(c(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} \right) dt$$

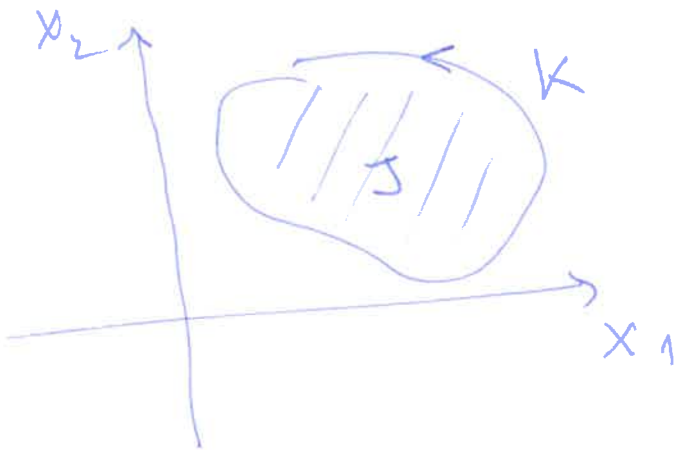
$$= \int_{t=a}^{b} \left(g_1 \cdot c_1' + g_2 \cdot c_2' \right) dt$$



Satz von Green: K geschlossene Kurve (positiv orientiert)

J = ~~Ber~~ beschränkte Bereich mit Rand K.

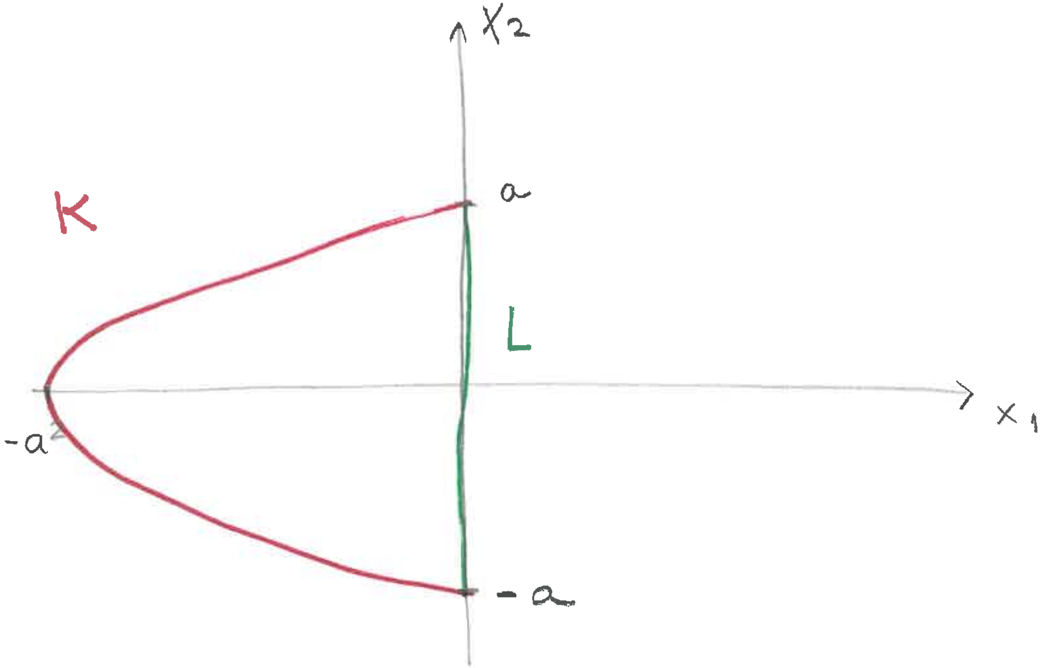
A4/6



$$\int_K g(x)\cdot dx = \iint_J \mathrm{rot}(g)\, dx_1\, dx_2 .$$

A 4/7

Hier sind die Berechnungen des Integrals, für die ich während der Vortragsübung keine Zeit hatte.



ⓐ $\int_K g(x) \cdot dx$

- Die Kurve K ist nicht geschlossen.
- $\mathrm{rot}(g)(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2 \sin(x_1)$

Also: es macht nicht Sinn, den Satz von Green zu nutzen, da rot(g) nicht so einfach ist.

(Wir werden sehen, dass für h mit rot(h) = 0 macht Sinn die Kurve K zu $\underline{\underline{K}} \cup \underline{\underline{L}}$ zu schliessen und Satz von Green anzuwenden.)

Also: wir wollen die Kurveintegral $\int_K g(x) \cdot dx$ berechnen.

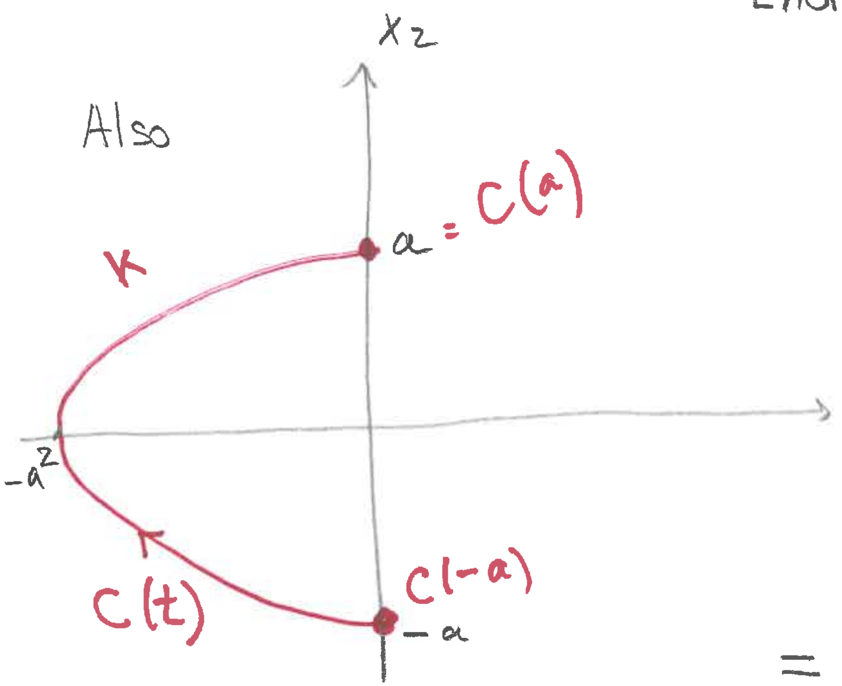
Dafür brauchen wir eine Parametriesierung von K:

Parametriesierung: $C(t) = \begin{pmatrix} -a^2+t^2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $-a \leq t \leq a$

Anfang Punkt: $C(-a) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$

End Punkt: $C(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$

Also



$C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann: $\int_K g(x) \cdot dx = \int_{-a}^{a} g(C(t)) \circ C'(t)\, dt$

$= \int_{-a}^{a} \begin{pmatrix} t^2 \sin(-a^2+t^2) \\ (-a^2+t^2)^2 + \cos(t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt$

$$= \int_{-a}^{a} \left(2t^3 \sin(-a^2+t^2) + (-a+t^2)^2 + \cos t \right) dt$$

$$= \underbrace{\int_{-a}^{a} \underbrace{2t^3 \sin(-a^2+t^2)}_{\text{ungerade Funktion}} dt}_{=0} + \int_{-a}^{a} (-a^2+t^2)^2 \, dt + \int_{-a}^{a} \cos t \, dt$$

$$\int_{-a}^{a} (-a^2+t^2)^2 \, dt = \int_{-a}^{a} (a^4 - 2a^2t^2 + t^4) \, dt = \left[a^4 t - 2a^2 \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_{t=-a}^{t=a}$$

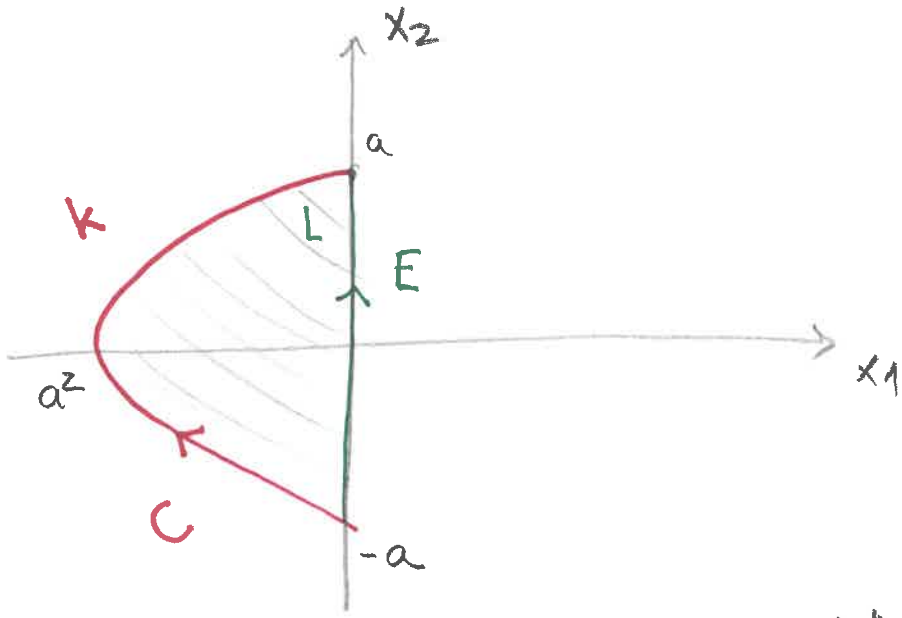
$$\int_{-a}^{a} \cos t \, dt = \left[\sin t \right]_{t=-a}^{t=a} = \sin(a) - \sin(-a) = 2 \sin(a)$$

$$= 2a^5 - \frac{4}{3} a^5 + \frac{2}{5} a^5 + 2 \sin(a)$$

$$= \frac{16}{15} a^5 + 2 \sin(a).$$

(b) $\int_K h(x) \cdot dx$

Da $\mathrm{rot}(h) = 0$, statt nochmal $\int_K h(x) \cdot dx$ mit der Parametrisierung von K zu rechnen, benutzen wir Satz von Green.



Sei L = ~~die Kurve Ger~~ Segment längs X_2-Achse von $(0,-a)$ nach $(0,a)$

$\Rightarrow K \cup L$ ist eine geschlossene Kurve (einfach, stückweise glatt)

Sei J = Gebiet mit Rand $K \cup L$

Wir orientieren den Rand von J positiv, d.h. $-K \cup L$

$\Rightarrow$ (Satz von Green) $\underbrace{\iint_J \underbrace{\mathrm{rot}(h)}_{=0} \, dx_1 \, dx_2}_{=0} = \int_{-K \cup L} h(x) \cdot dx$

$$= - \int_K h(x) \cdot dx + \int_L h(x) \cdot dx$$

Es folgt

$$\int_K h(x) \cdot dx = \int_L h(x) \cdot dx$$

- Eine Parametriesierung von L kompatibel mit der Orientierung

$$E(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad -a \leq t \leq a$$

$$\Rightarrow E'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $$\int_L h(x) \cdot dx = \int_{-a}^{a} h(E(t)) \cdot E'(t) \, dt = \int_{-a}^{a} \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_{-a}^{a} (t+1) \, dt$$

$$= 2a \, . \quad \Longrightarrow \boxed{\int_K h(x) \cdot dx = 2a}$$

Sie können versuchen auch das Integral $\int_K h(x) \cdot dx$ direkt zu rechnen (mit der Parametriesierung von K, die wir in Teil (a) benutzt haben).

Sie sollen auch 2a bekommen.

Aber mit Satz von Green ist das Ergebnis einfacher zu bekommen, da $\operatorname{rot}(h) = 0$.