Freitag, VII
11.11.2022.

Degeratu

Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 2

Vortragsübung am Mi 9.11.22, Fr 11.11.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Gauß in 2D)
Wir betrachten das Rechteck J mit Eckpunkten $\binom{0}{0}$, $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{0}{2}$. Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.

Berechnen Sie den Ausfluss des Vektorfeldes $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x}{y} \mapsto g(x,y) := \begin{pmatrix} x - e^{x-y} \\ y + e^{x-y} \end{pmatrix}$ durch K.

Aufgabe 2 (Flächen in 3D; Parametrisierungen und Flächeninhalt)
Seien $a, h \in \mathbb{R}_{>0}$. Skizzieren Sie die im $\mathbb{R}^3$ durch die Parametrisierung

$$\Phi(u,v) = (a\cos(u), a\sin(u), v) \quad \text{für} \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant h$$

gegebene Fläche und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Aufgabe 3 (Der Satz von Stokes)
Wir betrachten die folgenden Flächen:

- S_1: Mantelfläche der Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$.
- S_2: Mantelfläche des Rotationsparaboloids $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geqslant 0$.
- S_3: Kreisfläche $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$.

Sei g das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3\}$ die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, \partial S_i) = \iint_{S_i} \mathrm{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O$.

Aufgabe 4 (Integration in 3D)
Skizzieren Sie die beiden Zylinder

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ -2 \leqslant z \leqslant 2\}$$

$$Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 2\}$$

und berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge $B = Z_1 \cap Z_2$, d.h. $\iiint_B 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

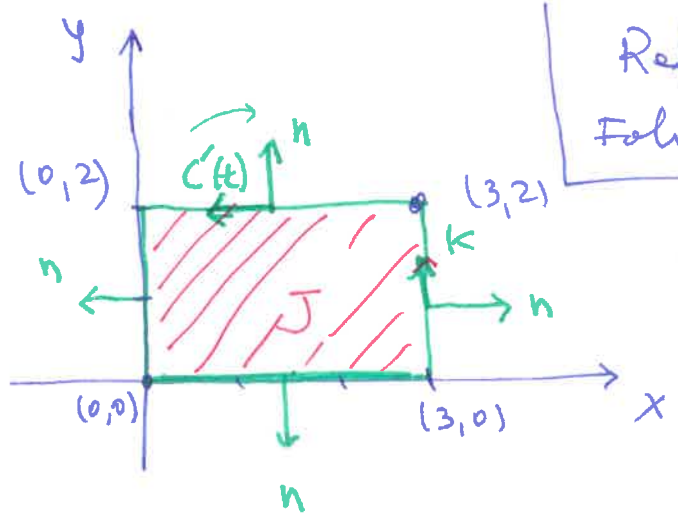
Aufgabe 1

Gegeben: • J = Rechteck.

$K = \partial J$ = Rand von J

• $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \begin{pmatrix} x - e^{x-y} \\ y + e^{x-y} \end{pmatrix}$



Referenzen

Folien 32 - 34

Zu Finden: Ausfluss g durch K.

$$A(g,K) \overset{\text{Def}}{\underset{1.5.5}{=}} \int_K g \cdot n \, ds = \sum_{j=1}^{4} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(c(t)) \cdot n(t) \, |c'(t)| \, dt$$

• $c(t)$ positive Parametriesurung des K

• $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ $\quad c'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix}$.

$$n(t) = \frac{1}{|c'(t)|} \begin{pmatrix} c_2'(t) \\ -c_1'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(c(t)) \cdot \begin{pmatrix} c_2'(t) \\ -c_1'(t) \end{pmatrix} dt$$

Möglichkeit 1

Möglichkeit 2

↓ Satz von Gauß

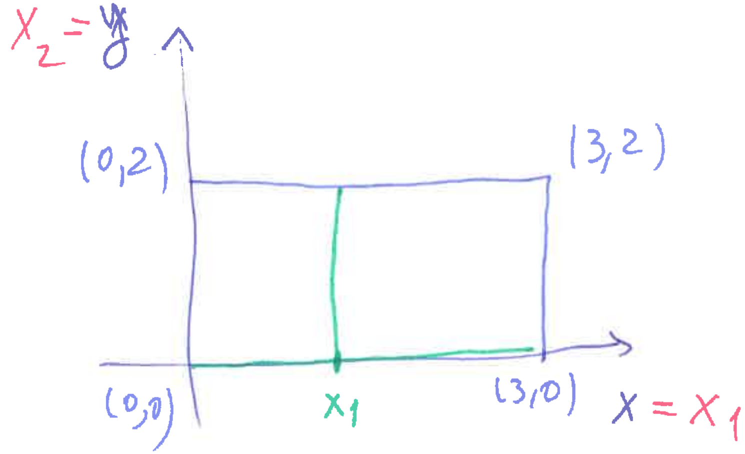
$$= \iint_J \operatorname{div}(g) \, dx_1 \, dx_2$$

Funktion

Rechteck (=> Normalbereich)

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - e^{x_1 - x_2} \\ x_2 + e^{x_1 - x_2} \end{pmatrix}$$



$$\operatorname{div}(g) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 - e^{x_1 - x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2 + e^{x_1 - x_2}\right)$$

$$= 1 - e^{x_1} \cdot e^{-x_2} + 1 + e^{x_1} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{-x_2}\right)}_{= -e^{-x_2}} = 1 + 1 - e^{x_1 - x_2} - e^{x_1 - x_2}$$

$$= 2 - 2e^{x_1 - x_2}$$

$$A(g, K) = \iint_J \left(2 - 2e^{x_1 - x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \int_{x_1=0}^{3} \Bigg(\underbrace{\int_{x_2=0}^{2} \left(2 - 2e^{x_1 - x_2}\right) dx_2}_{= \left[2x_2 + 2e^{x_1 - x_2}\right]_{x_2=0}^{2}} \Bigg) dx_1$$

$$J = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 3 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{array} \right\}$$

$$= \int_{x_1=0}^{3} \left(2(2-0) + 2e^{x_1}\left(e^{-2} - e^{-0}\right) \right) dx_1 = \int_{x_1=0}^{3} \left(4 + 2e^{x_1 - 2} - 2e^{x_1}\right) dx_1$$

$$= 4 \cdot 3 + 2e^{-2}\left(e^{3} - e^{0}\right) - 2\left(e^{3} - \underbrace{e^{0}}_{=1}\right).$$

$$= 12 + 2e - 2e^{-2} - 2e^{3} + 2.$$

$$= 14 + 2e - 2e^{-2} - 2e^{3}.$$

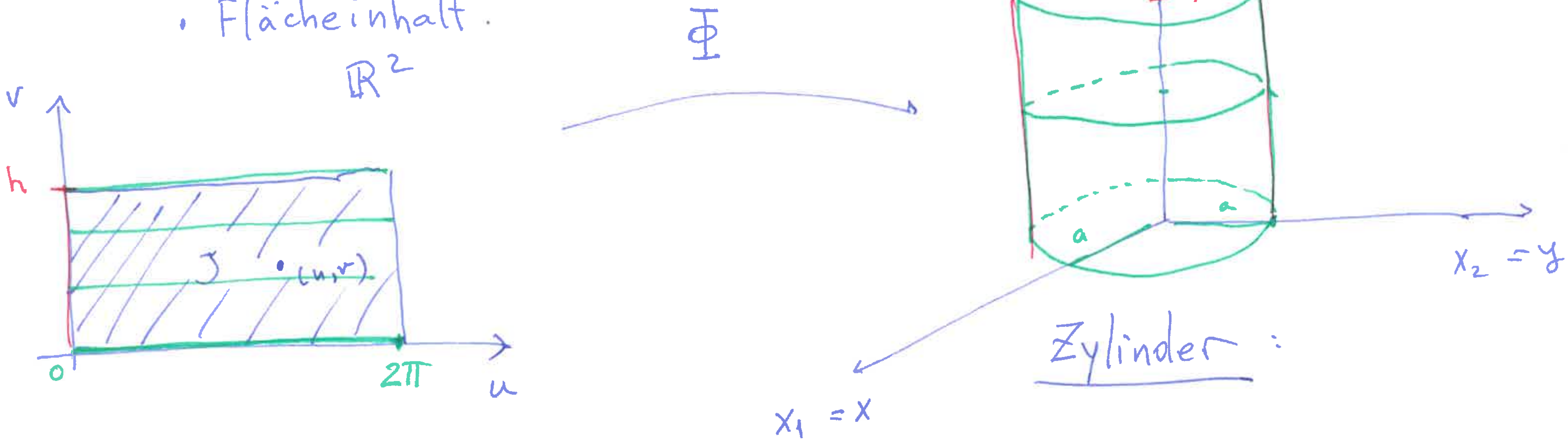
Aufgabe 2

Referenz
Folien 46 – 50

Gegeben:
- $a, h > 0$
- $\Phi(u, v) = (a\cos(u), a\sin(u), v)$

$0 \leq u \leq 2\pi \qquad 0 \leq v \leq h.$

Wollen:
- Skizze der Fläche in 3D.
- Flächeinhalt.



Zylinder:

$v = 0: \quad \Phi(u, 0) = (a\cos(u), a\sin(u), 0). \leftarrow$ Kreis vom Radius a im (x_1, x_2)-Ebene

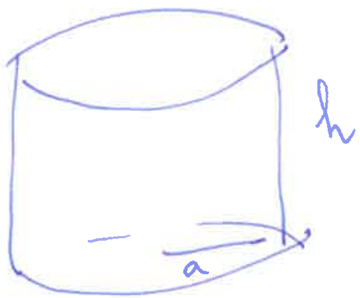
Höhe $= h.$

$$\left| \phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) \right| = \left| \begin{pmatrix} a\cos u \\ a \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(a\cos u)^2 + (a \sin u)^2 + (0)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{=1}} = a > 0 .$$

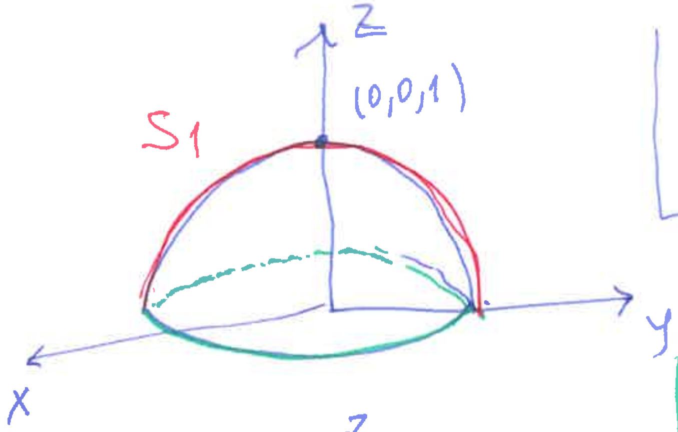
$$F(S) = \iint_J a \, du\, dv = a \int_{u=0}^{2\pi} \left(\int_{v=0}^{h} dv \right) du = \underbrace{(2\pi a)}_{\uparrow} \cdot h \leftarrow \text{Höhe}$$

Länge Kreis Radius = a



Aufgabe 3

- $S_1 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}$

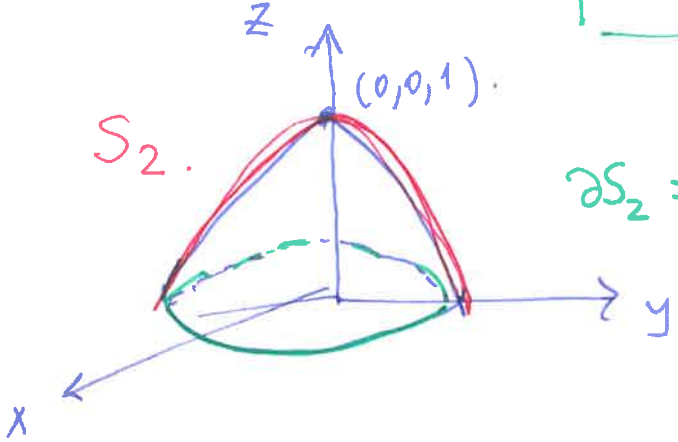


Referenz
Folien 65–68

Halbkugel.

$$\boxed{\partial S_1 = \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{array} \right\}}$$

$S_2 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} z = 1-x^2-y^2 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}$



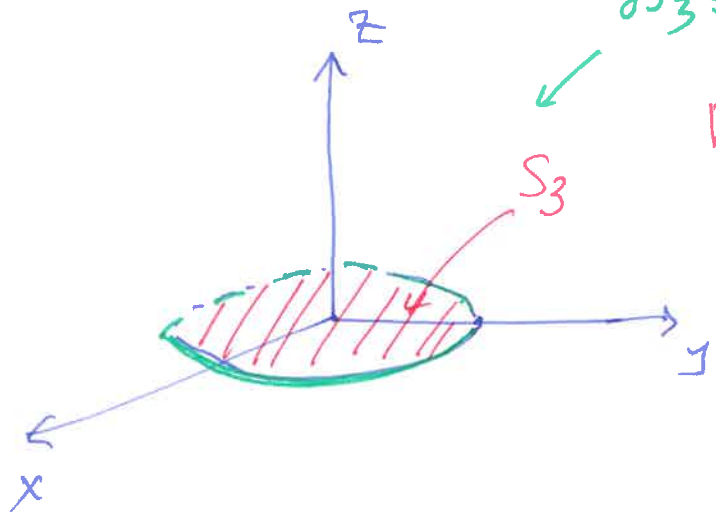
Paraboloid.

$$\partial S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{array} \right\}$$

$S_3 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 1 \\ z=0 \end{array} \right\}.$

$$\partial S_3 = \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{array} \right\}.$$

Disk.



- $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}.$

? Zirkulationen $Z(g, \partial S_i) = ?$

$i = 1, 2, 3.$

- S Fläche in 3D.

∂S = Rand von S.

① ϕ = Parametriesierung von S.
$\phi(u,v)$

$$Z(g,\partial S) \overset{Def}{=} \iint_S \underbrace{\mathrm{rot}(g)}_{\mathbb{R}^3} \cdot n \, dO$$

$$dO = |\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)| \, du\, dv$$

③ äußere Normale zur S.

Methode 1

② $\mathrm{rot}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$

Methode 2

$$Z(g,\partial S) \underset{\uparrow}{=} \int_K g(x)\cdot dx \underset{\uparrow}{=} \int_{t=a}^{b} g(c(t))\cdot c'(t)\, dt.$$

Satz von Stokes

$K = \partial S$

für $c(t)$ eine positive Parametriesierung des Randes K
$K = \partial S$

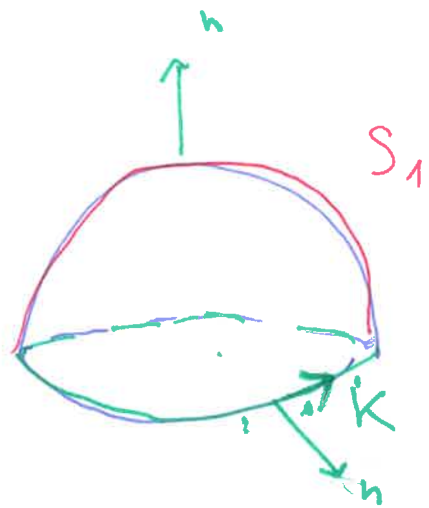
$a \le t \le b$

Für uns: Alle Flächen S_1, S_2, S_3 haben gleichen Rand $K = \left\{ \begin{matrix} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{matrix} \right\}$

$\Longrightarrow$ (Mit Satz von Stokes)

$$Z(g, \partial S_1) = Z(g, \partial S_2) = Z(g, \partial S_3).$$

$$= \int_K g(x) \cdot dx$$



Parametriesierung von $K = \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{array} \right\}$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_K g(x) \cdot dx = \int_{t=0}^{2\pi} \underline{g(c(t))} \cdot c'(t)\, dt$$

$$g(c(t)) = g(\cos t, \sin t, 0) = \begin{pmatrix} \cos^2 t + \sin^2 t \\ \sin t \\ 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\int_K g(x)\cdot dx = \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix}1\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^{2\pi}\Big(-\sin t + \underbrace{\sin t\cdot\cos t}_{\sin t\cdot \sin'(t)}\Big)\,dt$$

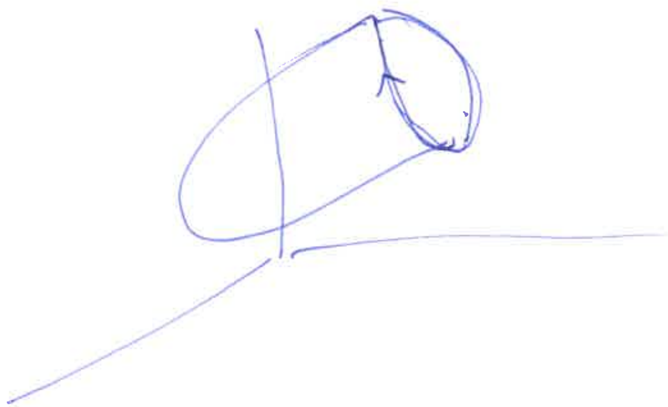
$$= \frac{1}{2}\left(\sin^2 t\right)'$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\cdot\sin t\cdot\cos t$$

$$= \Big[\cos t\Big]_{t=0}^{2\pi} + \Big[\frac{1}{2}\sin^2 t\Big]_{t=0}^{2\pi}$$

$$= \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin^2(2\pi)}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin^2(0)}_{=0}$$

$$= 0.$$



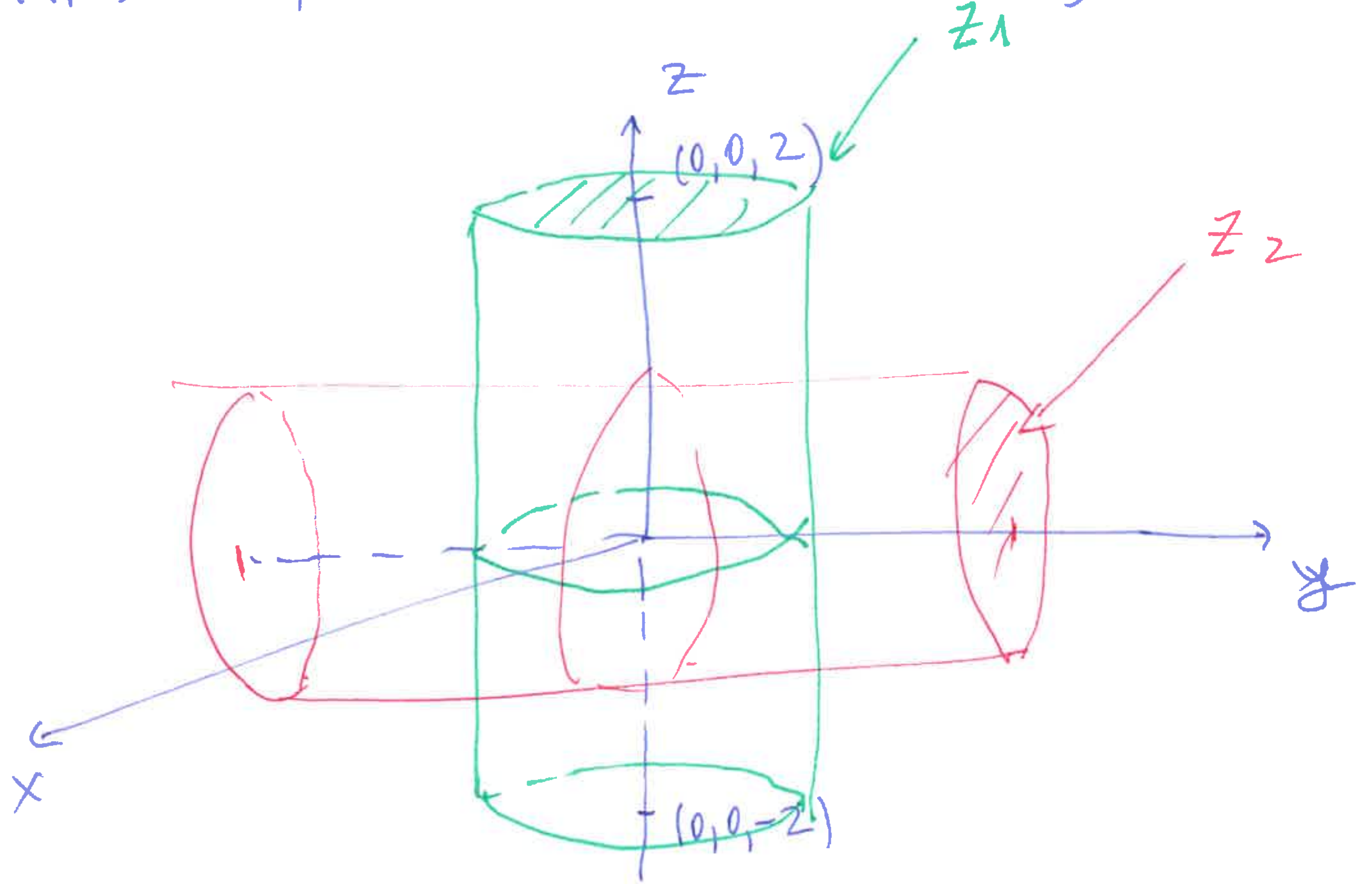
Aufgabe 4

$$Z_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1 \quad -2 \leq z \leq 2 \}.$$

$$Z_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \leq 1 \quad -2 \leq y \leq 2 \}.$$

$$B = Z_1 \cap Z_2$$

$$\boxed{\text{Volumen}(B) = ?}$$

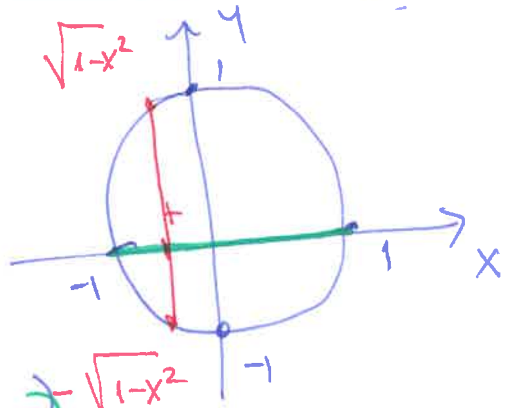


$$\text{Volumen}(B) = \iiint_{B} 1 \, dx\,dy\,dz$$

Definition.

$$B = Z_1 \cap Z_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x^2+y^2 \le 1 & -2 \le z \le 2 \\ x^2+z^2 \le 1 & -2 \le y \le 2 \end{array} \right\}$$

$$\left[\; x^2+y^2 \le 1 \;:\; \begin{array}{c} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$



$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{lll} -1 \le x \le 1 ; & -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} ; & -2 \le z \le 2 \\ -1 \le x \le 1 & -2 \le y \le 2 & -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ -1 \le x \le 1 ,\; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} ,\; -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2} \right\}$$

$$\text{Volumen}(B) = \iiint_B 1 \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left[\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\left(\int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz \right)}_{= \sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx .$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2} \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} \underbrace{\left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \right)}_{= 2\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{x=-1}^{1} \left(2\sqrt{1-x^2}\right)\left(2\sqrt{1-x^2}\right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} 4\left(1-x^2\right) dx = 4 \cdot 2 - \frac{4}{3}(2) .$$

$$= \frac{16}{3} .$$