Mittwoch 9.11.22

Degeratu Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 2

Vortragsübung am Mi 9.11.22, Fr 11.11.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Gauß in 2D)
Wir betrachten das Rechteck J mit Eckpunkten $\binom{0}{0}$, $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{0}{2}$. Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.
Berechnen Sie den Ausfluss des Vektorfeldes $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x}{y} \mapsto g(x,y) := \binom{x-\mathrm{e}^{x-y}}{y+\mathrm{e}^{x-y}}$ durch K.

Aufgabe 2 (Flächen in 3D; Parametrisierungen und Flächeninhalt)
Seien $a, h \in \mathbb{R}_{>0}$. Skizzieren Sie die im $\mathbb{R}^3$ durch die Parametrisierung

$$\Phi(u,v) = (a\cos(u), a\sin(u), v) \quad \text{für} \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant h$$

gegebene Fläche und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Aufgabe 3 (Der Satz von Stokes)
Wir betrachten die folgenden Flächen:

- S_1: Mantelfläche der Halbkugel $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$.
- S_2: Mantelfläche des Rotationsparaboloids $z = 1-x^2-y^2$, $z \geqslant 0$.
- S_3: Kreisfläche $x^2+y^2 \leqslant 1$, $z=0$.

Sei g das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3\}$ die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, \partial S_i) = \iint_{S_i} \mathrm{rot}(g) \bullet n \; \mathrm{d}O$.

Aufgabe 4 (Integration in 3D)
Skizzieren Sie die beiden Zylinder

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ -2 \leqslant z \leqslant 2\}$$

$$Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 2\}$$

und berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge $B = Z_1 \cap Z_2$, d.h. $\iiint_B 1 \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

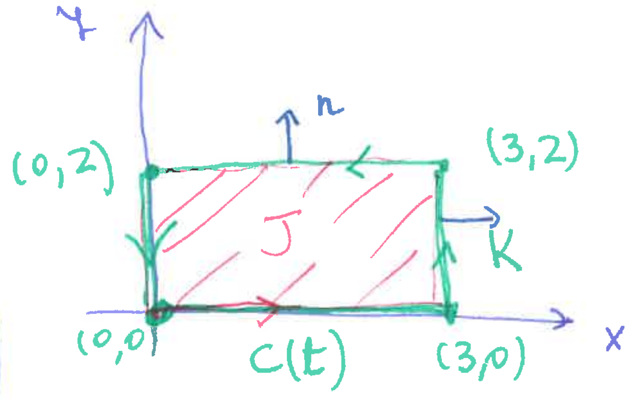
Aufgabe 1

Referenzen
Folien 32 - 34

J = Rechteck

$K = \partial J$ = Rand von J.

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \begin{pmatrix} x - e^{x-y} \\ y + e^{x \cdot y} \end{pmatrix}$$



Wollen: Ausfluss g durch K

$$A(g,K) \overset{\text{Def}}{\underset{1.5.5}{=}} \int_K g \cdot n \, ds$$

äußere Normaleinheitsvektor.
$|n(t)| = 1$.

Bemerkung 1.5.6.

Was das bedeutet

$$= \sum_{j=1}^{4} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(C(t)) \cdot n(t) \, |C'(t)| \, dt$$

positive Parametriesierung des K.

J immer auf der linken Seite

Mit der Definition

- $C(t)$
- $C'(t)$, $|C'(t)|$
- $n(t)$
- Das Integral zu rechnen.

$$A(g,K) = \boxed{\int_K g \cdot n \, ds} = \iint_J \underbrace{\mathrm{div}(g)}_{\text{Funktion}} \, dx_1 \, dx_2 .$$

Satz von Gauß

$(x, y) = (x_1, x_2)$

$\uparrow$ Koordinaten

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - e^{x_1 - x_2} \\ x_2 + e^{x_1 - x_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} = g_1(x_1, x_2) \\ = g_2(x_1, x_2) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{x_1 - x_2}\right) = e^{x_1} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{-x_2}\right)}_{= -e^{-x_2}} = -e^{x_1 - x_2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition}}}{\mathrm{div}(g)} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$$

$$= \frac{\partial\left(x_1 - e^{x_1 - x_2}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(x_2 + e^{x_1 - x_2}\right)}{\partial x_2}$$

$$= 1 - e^{x_1 - x_2} + 1 - e^{x_1 - x_2} = 2 - 2e^{x_1 - x_2}$$

$$A(g, K) = \iint_J \left(2 - 2e^{x_1 - x_2}\right) dx_1 \, dx_2 \qquad J = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le x_1 \le 3 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{matrix} \right\}$$

$$= \int_{x_1=0}^{3} \left(\int_{x_2=0}^{2} \left(2 - 2e^{x_1 - x_2}\right) dx_2 \right) dx_1 = \int_{x_1=0}^{3} \left[2x_2 + 2e^{x_1 - x_2} \right]_{x_2=0}^{2} dx_1$$

$$= \int_{x_1=0}^{3} \left(4 - 0 + 2e^{x_1 - 2} - 2e^{x_1}\right) dx_1 = \ldots$$

$$= \int_{x_1=0}^{3} \left(4 + 2e^{-2} e^{x_1} - 2e^{x_1} \right) dx_1$$

$$= 4 \cdot 3 + 2e^{-2}\left(e^{3} - e^{0}\right) - 2\left(e^{3} - e^{0}\right)$$

$$= 12 + 2e - 2e^{-2} - 2e^{3} + 2$$

$$= 14 + 2e - 2e^{-2} - 2e^{3} .$$

Aufgabe 2

Kreis von Radius a

Referenz
Folien 46–50

$a, h > 0$

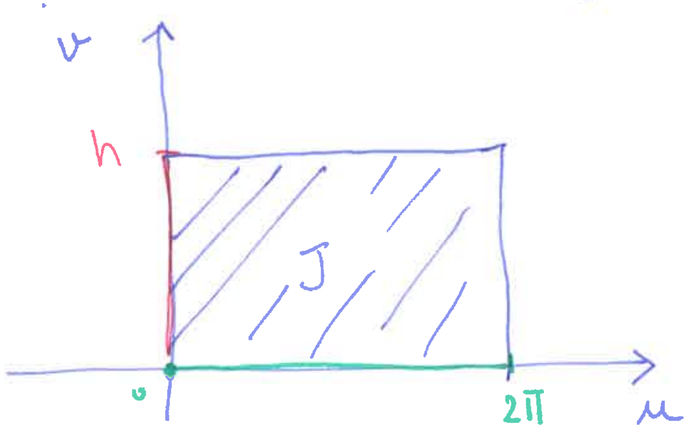
$$\phi(u,v) = (\underbrace{a\cos u,\ a\sin u}, v)$$

mit $0 \le u \le 2\pi$ $\quad 0 \le v \le h.$

Skizze ?

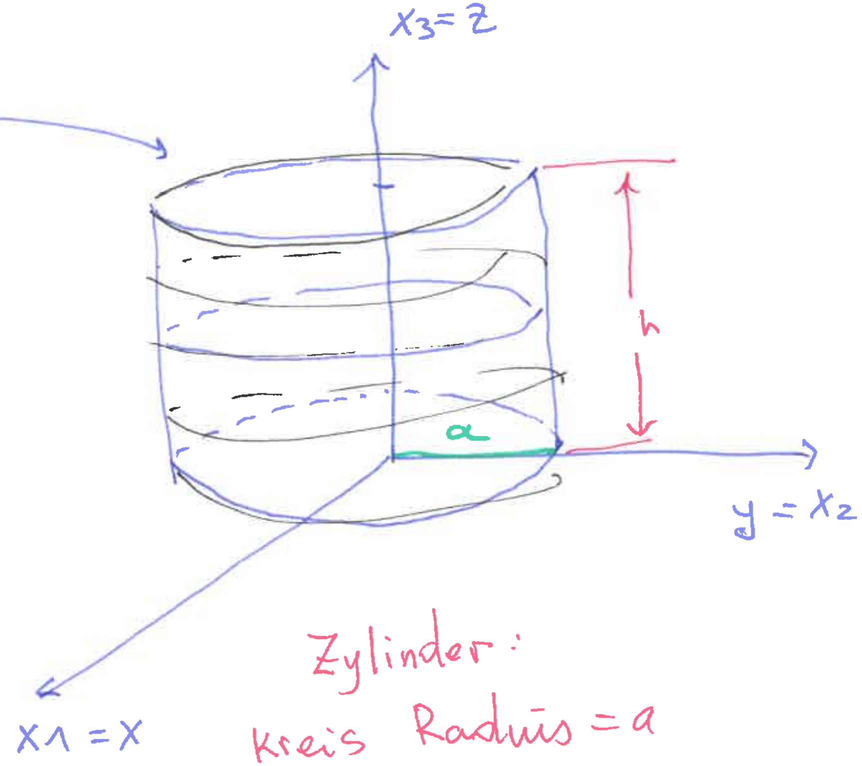
Flächeinhalt ?

$\mathbb{R}^2$



Φ

$\mathbb{R}^3$



$$J = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le h \end{matrix} \right\}$$

Zylinder:
Kreis Radius = a
Höhe = h.

Flächenin

Flächeinhalt von $\left(S = \phi(J)\right)$

$$= F(S) \underset{\text{Folie 49}}{\overset{\uparrow}{=}} \iint_J \left| \phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) \right| du\, dv$$

$$\Phi(u,v) = \left(a\cos(u),\ a\sin(u),\ v\right),$$

$$\Phi_u(u,v) = \left(-a\sin(u),\ a\cos(u),\ 0\right).$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \qquad \Phi_v(u,v) = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) = (0,\ 0,\ 1).$$

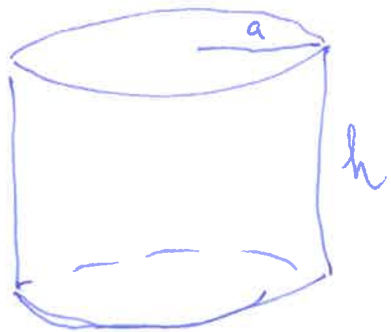
$$\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} -a\sin(u) \\ a\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} -a\sin(u) & a\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{pmatrix} a\cos u \\ a\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)\right| = \sqrt{(a\cos u)^2 + (a\sin u)^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{=1}} = a$$

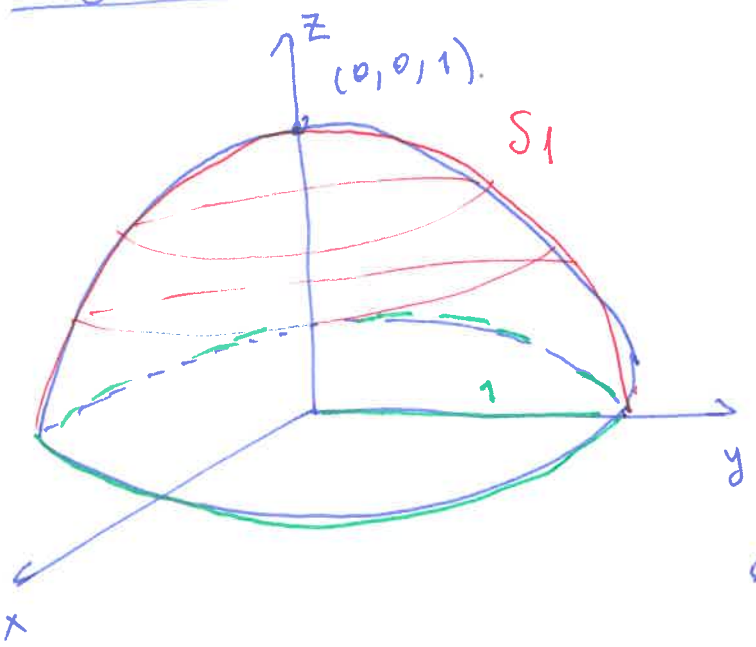
$$F(S) = \iint_J a \, du \, dv = a \iint_J 1 \, du \, dv = a \int_{u=0}^{2\pi} \left(\int_{v=0}^{h} 1 \, dv \right) du$$

$$J = \left\{ (u,v) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le h \end{array} \right\} \qquad = \underbrace{(2\pi a)}_{\text{Länge Kreis vom Radius } = a} h .$$



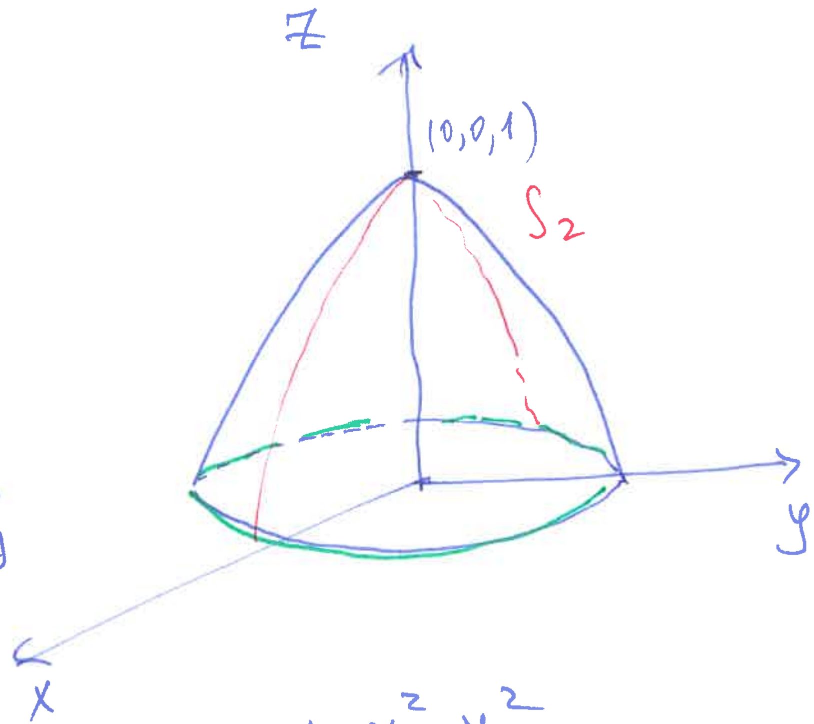
Aufgabe 3

Referenz
Folien 65-68



$x^2+y^2+z^2=1, \quad z \geq 0$

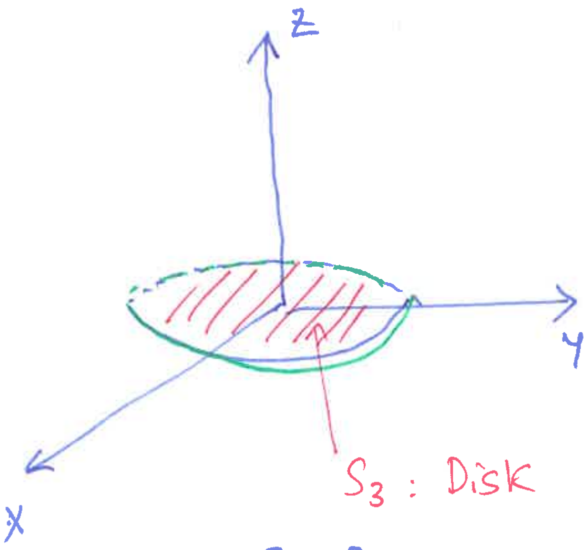
S_1 : Halbkugel.



$z = 1 - x^2 - y^2$

$z \geq 0$ Paraboloid.

$x^2+y^2 = 1 - z$



$x^2+y^2 \leq 1$

$z = 0$.

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld.

$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}.$

Wollen : Zirkulationen

$Z(g, \partial S_1) = ?$

$Z(g, \partial S_2) = ?$

$Z(g, \partial S_3) = ?$

S Fläche in $\mathbb{R}^3$.

∂S Rand von S.

$$Z(g,\partial S) \overset{\text{Def}}{=} \iint_S \operatorname{rot}(g)\cdot n \, dO$$

① Parametriesierung von S $\phi(u,v)$

$|\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)|\,du\,dv$

② äußere Normale zur S

③

$$\operatorname{rot}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} - \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

Praxis

$$Z(g,\partial S) \xrightarrow{\text{Satz von Stokes}} = \int_K g(x)\cdot dx = \int_a^b g(c(t))\cdot c'(t)\,dt$$

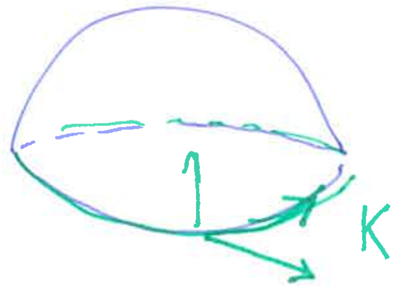
für $c(t)$ eine positive Parametriesierung vom Rand $K=\partial S$.

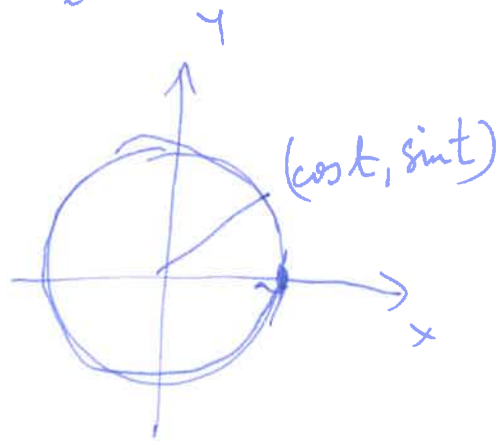
Für uns: Alle Flächen S_1, S_2, S_3 haben gleichen Rand K = Kreis Radius 1 in xy-Ebene.

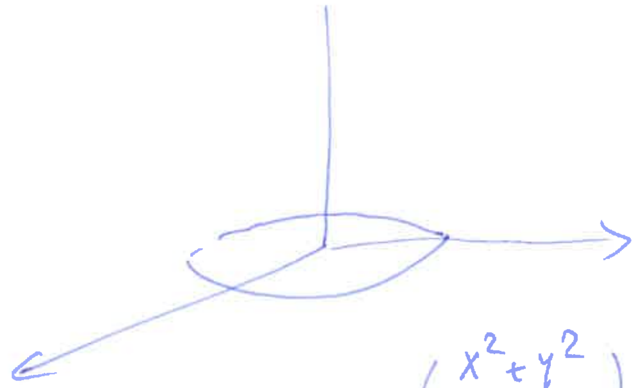
$\Longrightarrow$ (Mit Satz von Stokes)

$$Z(g, \partial S_1) = Z(g, \partial S_2) = Z(g, \partial S_3) = \iint_{S_i} \operatorname{rot}(g) \cdot n_i \, dO$$

$$= \boxed{\int_K g(x) \cdot dx.}$$







Parametriesierung von K

$$c(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_K g(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} g(c(t)) \cdot c'(t) \, dt$$

$$g(c(t)) = g(\cos t, \sin t, 0) = \begin{pmatrix} \cos^2 t + \sin^2 t \\ \sin t \\ 0^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}}}.$$

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

$$c'(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\int_K g(x)\cdot dx = \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^{2\pi} \Big(-\sin t + \sin t \cdot \underbrace{\cos t}_{(\sin t)'}\Big)\, dt$$

$$= \Big[\cos t\Big]\Big|_{t=0}^{t=2\pi} + \left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]\Big|_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= \underset{\substack{\| \\ 1}}{\cos 2\pi} - \underset{\substack{\| \\ 1}}{\cos 0} + \frac{\sin^2(\overset{\substack{0 \\ \|}}{2\pi}) - \sin^2(\overset{\substack{0 \\ \|}}{0})}{2} = 0.$$

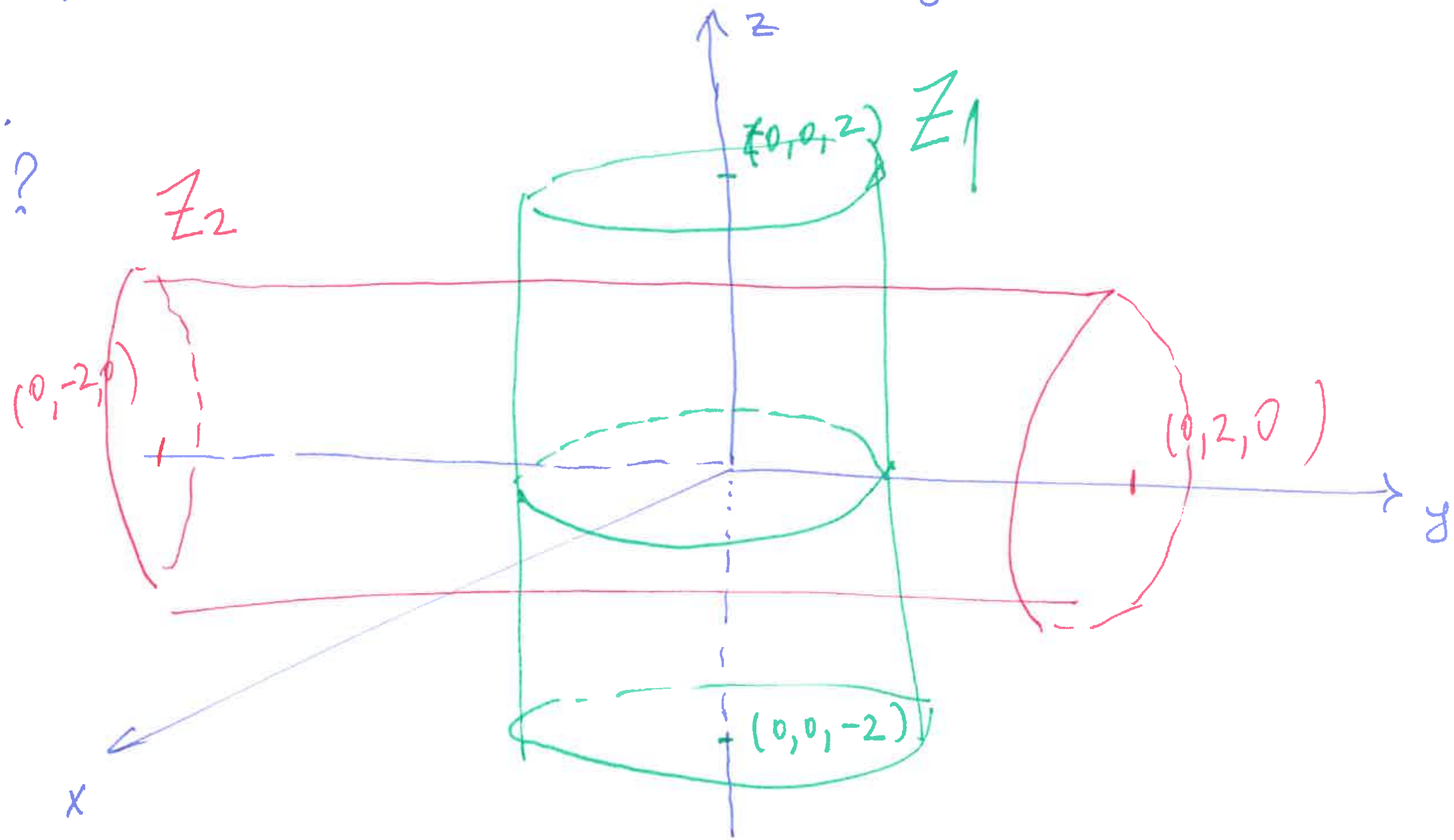
Aufgabe 4

$$Z_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x^2+y^2 \le 1}, \quad -2 \le z \le 2 \}$$

$$Z_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \le 1, \quad -2 \le y \le 2 \}$$

$B = Z_1 \cap Z_2$.

Volumen $(B) = ?$



$$\text{Volumen}(B) = \iiint_{B} 1 \, dx\,dy\,dz$$

Definition

Normalbereich im 3D.

$$Z_1 : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ -2 \le z \le 2 \end{cases}$$

$$Z_2 : \begin{cases} x^2+z^2 \le 1 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$B = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 1, \\ x^2+z^2 \le 1 \end{array} \right\}.$$

$$-1 \le y \le 1$$
$$-1 \le z \le 1$$

$$-1 \le x \le 1$$
$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$
$$-\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2+y^2 \le 1.$$
$$y^2 \le 1-x^2 \iff -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \; -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}.$$

$$\text{Volumen}(B) = \iiint_B 1 \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\Big[z \Big]_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{z=\sqrt{1-x^2}}}_{\substack{= \sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) \\ = 2\sqrt{1-x^2}}} dy \right) d\cancel{x}$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{\text{hängt nicht von } y \text{ ab}} \, d\cancel{y}\, y \right) dx = \int_{x=-1}^{1} \left(2\sqrt{1-x^2} \underbrace{\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy}_{= 2\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left(2\sqrt{1-x^2}\right)\left(2\sqrt{1-x^2}\right) dx = \int_{x=-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx$$

$$= \left[4x - \frac{4}{3} x^3 \right]_{x=-1}^{1} = 4\left(1-(-1)\right) - \frac{4}{3}\left(1^3 - (-1)^3\right).$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$