Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Vortragsübung am Mi 23.11.22, Fr 25.11.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Gauß in 3D)
Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 5 \right\}$ ein Zylinder mit Radius $R = 2$ und Höhe $H = 5$. Sei S seine Oberfläche.
Berechnen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, S)$ des Vektorfeldes $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1^3 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ durch S.

Aufgabe 2 (Transformationsatz in 3D)
Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4 - x^2 - y^2 \leqslant z \leqslant 3\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x-z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$.
2. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten.
3. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung die z-Koordinate $\frac{\iiint_K z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{\iiint_K 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}$ des Schwerpunkts von K.

Aufgabe 3 (Differentialgleichung mit getrennten Variablen)

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -2x\mathrm{e}^y \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,.$$

2. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = -y^2\,.$$

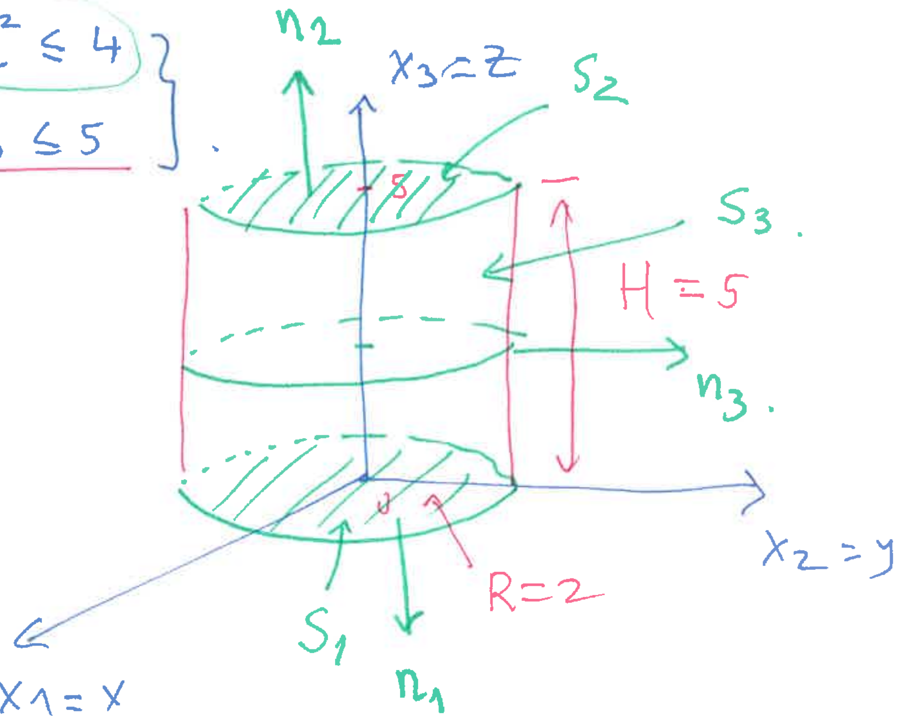
(Beispiel einer Bernoulli-Differentialgleichung)

Aufgabe 4 (Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung)
Sei $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y\tan(x) = \sin(2x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 1

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ 0 \leq x_3 \leq 5 \end{array} \right\}.$



$S = \partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

$A(g, S) = ?$ Ausfluss von g durch S.

Lösung:

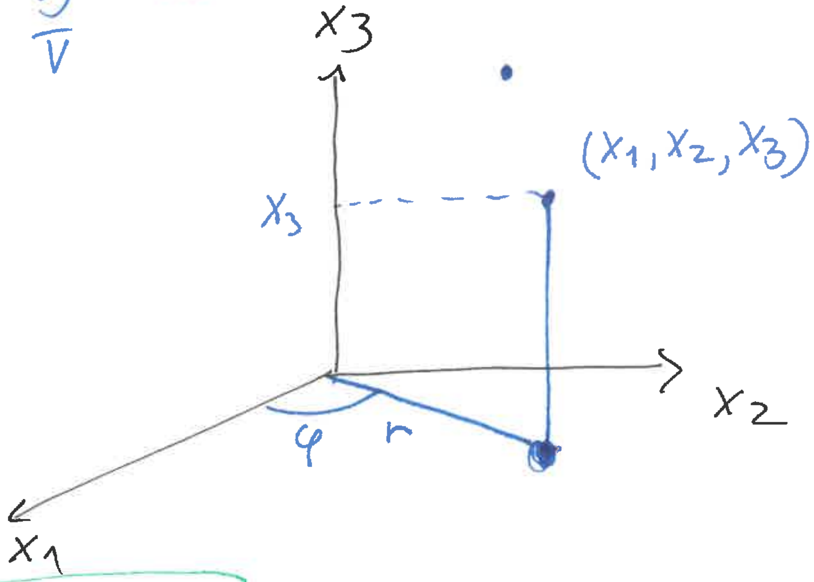
$$A(g,S) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition} \\ 2.4.1.}}{=} \iint_S g \cdot n \, dO \underset{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3}{=} \iint_{S_1} g \cdot n_1 \, dO + \iint_{S_2} g \cdot n_2 \, dO + \iint_{S_3} g \cdot n_3 \, dO$$

$$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{Satz Gauß} \\ 2.4.2.}}{=} \iiint_{\overline{V}} \underline{\operatorname{div}(g)} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

$$\operatorname{div}(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3) = 3x_1^2 - 1 + 1 = 3x_1^2$$

$$A(g,S) = \iiint_V \operatorname{div}(g)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_V 3x_1^2 \;\boxed{dx_1\, dx_2\, dx_3}.$$



Zylindrische Koordinaten (Beispiel 2.3.6)

(r, φ, x_3)

$$\begin{aligned} x &= \boxed{x_1 = r\cos\varphi} \\ y &= x_2 = r\sin\varphi \\ z &= x_3 = x_3 \end{aligned}$$

$0 \le r \le R = 2$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le x_3 \le \cancel{H} = 5$

$$A(g,S) = \int_{x_3=0}^{5} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} 3(r\cos\varphi)^2 \;\boxed{r\, dr\, d\varphi\, dx_3}$$

Zylindrische Koord.

det der Jacobi-Matrix des Transf.s.

$$= \int_{x_3=0}^{5} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{2} 3r^3 \cos^2\varphi \, dr \right) d\varphi \right) dx_3$$

$$= \int_{x_3=0}^{5} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\left[3\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{2}}_{= 3\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = 12.} \cos^2\varphi \, d\varphi \, dx_3$$

$$= \int_{x_3=0}^{5} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} 12 \cos^2\varphi \, d\varphi \right) dx_3 .$$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$= \cos^2\varphi - 1 + \cos^2\varphi$$
$$= 2\cos^2\varphi - 1$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}.$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi - 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (0-0).$$

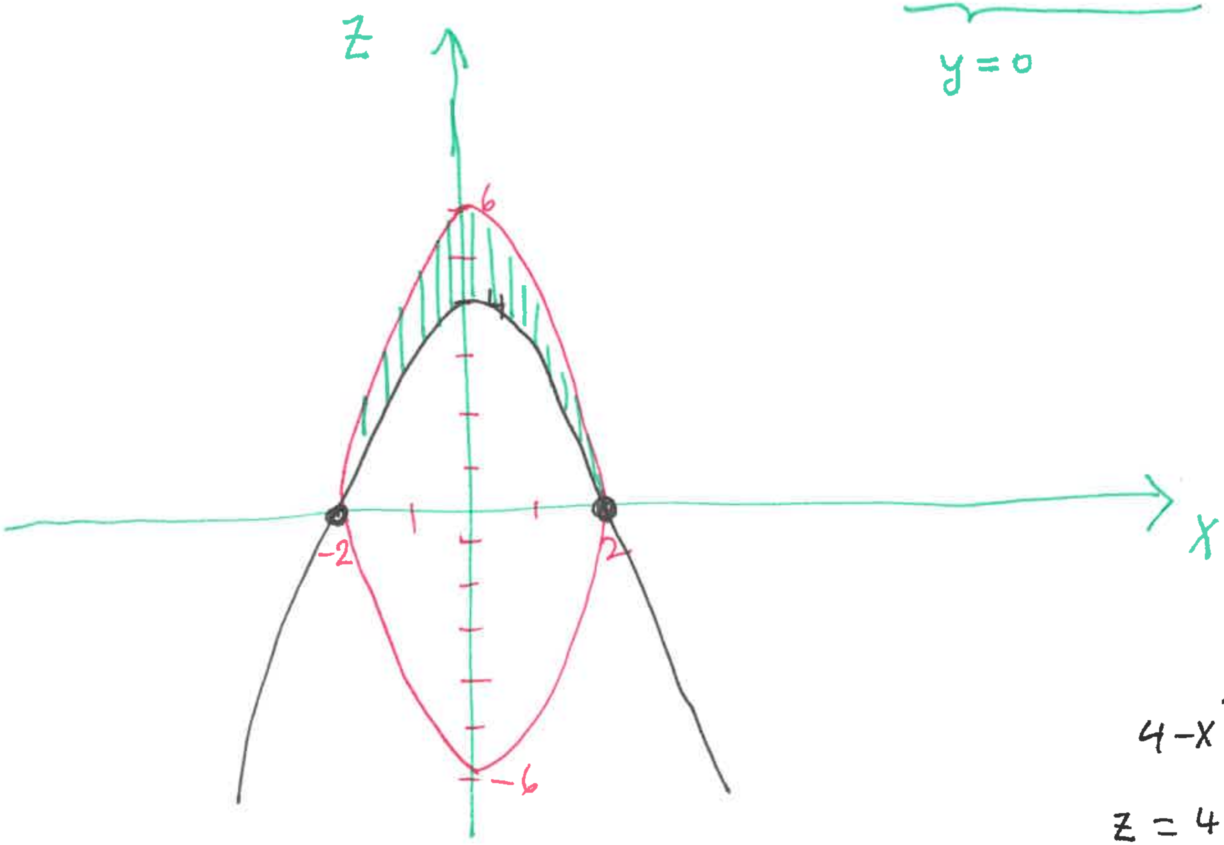
$$= \pi$$

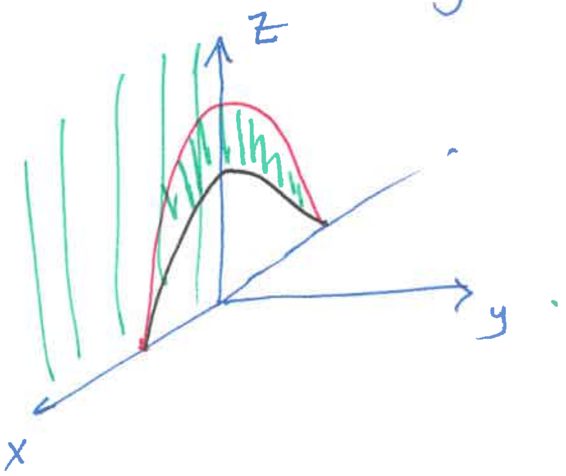
$$= \int_{x_3=0}^{5} 12\pi \, dx_3 = 60\pi .$$

Aufgabe 2 :

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{4 - x^2 - y^2}\le z \le 3\sqrt{4-x^2-y^2} \} .$$

1. Skizze : Schnitt von K mit $\underbrace{xz}_{y=0}$ - Ebene .





In der xz-Ebene: $K \cap \{y=0\}$.

$$4 - x^2 \le z \le 3\sqrt{4-x^2}$$

$$4-x^2 = z$$

$$z = 4-x^2$$

Parabola .

$z=0 \Rightarrow x = \pm 2$

$x=0 \Rightarrow z = 4$

$$z = 3\sqrt{4-x^2}$$

$$\left(\frac{z}{3}\right)^2 = 4-x^2$$

$$x^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 4$$

Ellipse : $x=0 \Rightarrow z = \pm 6$

$z=0 \Rightarrow x = \pm 2$

K = Elipsoid \ Paraboloid

② Parametrisiere K in Zylindrische-Koordinaten (Beispiel ~~2.6.~~ 2.3.6)

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\zeta}_{\text{Transformation}} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\det\big(J(\zeta)\big) = r.$$

$$\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 4 - r^2 \le z \le 3\sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

$$K: \quad 4 - x^2 - y^2 \le z \le 3\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$4 - r^2 \le z \le 3\sqrt{4 - r^2}$$

③ $S = (x_S, y_S, z_S)$ Schwerpunkt von K.

$z_S = ?$ Beispiel 2.3.8

$$x_S = \frac{1}{\mathrm{Vol}(K)} \iiint_K x \, dx\, dy\, dz$$

$$y_S = \frac{1}{\mathrm{Vol}(K)} \iiint_K y \, dx\, dy\, dz$$

$$z_S = \frac{1}{\mathrm{Vol}(K)} \iiint_K z \, dx\, dy\, dz$$

Um z_s bestimmen brauchen wir.

① $\mathrm{vol}(K) = \iiint_K 1 \, dx\,dy\,dz$

② $\iiint_K z \, dx\,dy\,dz$.

$$\mathrm{vol}(K) = \iiint_K 1 \, dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zylindrische} \\ \text{koordinaten}}}{=} \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=4-r^2}^{3\sqrt{4-r^2}} 1 \cdot r \, dz \, d\varphi \, dr$$

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$4-r^2 \leq z \leq 3\sqrt{4-r^2}$

$$= \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \, [z] \Big|_{z=4-r^2}^{3\sqrt{4-r^2}} d\varphi \, dr$$

$$= \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underline{r\left(3\sqrt{4-r^2} - (4-r^2)\right)} \, d\varphi \, dr$$

$$= 2\pi \left(\int_{r=0}^{2} \underbrace{3r\sqrt{4-r^2}} \, dr - \underbrace{\int_{r=0}^{2} r(4-r^2)\, dr}_{\text{einfach}} \right).$$

$$3r \, (4-r^2)^{1/2}$$

$$\left((4-r^2)^{3/2} \right)' = \frac{3}{2} (4-r^2)^{1/2} \underbrace{(4-r^2)'}_{=-2r}$$

$$= -3 (4-r^2)^{1/2}$$

$$= 2\pi \left(- (4-r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{2} + \frac{1}{4} (4-r^2)^2 \Big|_{r=0}^{2} \right) = 2\pi \left(-(0-4^{3/2}) + \frac{1}{4}(0-4^2) \right)$$

$$= \ldots = 8\pi$$

Aufgabe 3

$$y' = \underbrace{-2x}_{=g(x)} \cdot \underbrace{e^y}_{=h(y)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0.$$

Schritt 1: Finde ~~die~~ allgemeine Lösung

$$y' = -2x \cdot e^y$$

Schritt 2: Finde Lösung des AWPS $y(0)=0$.

Schritt 1: • Trennen:

$$\frac{dy}{dx} = -2x \cdot e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = -2x\,dx$$

• Integriere.

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int -2x\,dx$$

$$-e^{-y} = -x^2 + C$$

$$e^{-y} = x^2 - C$$

Referenz

Section 3.2.

Trennung der Variable

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)).$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{g(x)}\cdot\underbrace{h(y)},$$

$$\underbrace{\frac{dy}{h(y)}}_{\text{mit } y.} = \underbrace{g(x)\,dy}_{\text{mit } x}$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$$

$$e^{-y} = x^2 - c$$

$$-y = \ln(x^2 - c)$$

$$y = -\ln(x^2 - c).$$ für c eine Konstante.

und x s.d. $\underline{x^2 - c > 0}$.

<u>Schritt 2</u>: Finde c so dass $y(0) = 0$.

$$y(x) = -\ln(x^2 - c)$$

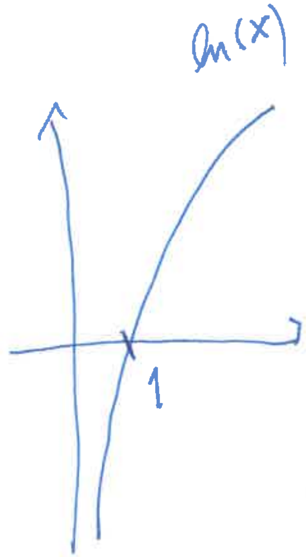
$$y(0) = -\ln(0^2 - c) = -\ln(-c)$$

$$y(0) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(-c) = 0$$

$$-c = 1$$

$$\boxed{c = -1}$$



Lösung AWP: $\boxed{y(x) = -\ln(x^2+1)}$

Probe: $y'(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$

$$\cancel{-2x\, e^{y}} = -2x\, e^{-\ln(x^2+1)} = -2x\, e^{\ln \frac{1}{\ }}$$

$$y(x) = -\ln(x^2+1).$$

Probe: $\quad y' = -2x \cdot e^{y} \quad$ mit $\quad y(0) = 0.$

$$y'(x) = -\left(\ln(x^2+1)\right)' \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{x^2+1}\,(x^2+1)' = -\frac{2x}{x^2+1}.$$

Ketten-
Regel

$$-2x \cdot e^{y} = -2x \cdot e^{-\ln(x^2+1)} = -2x\, e^{\ln\frac{1}{x^2+1}} = -\frac{2x}{x^2+1}.$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = \underline{-\ln b}.$$

$$y(0) = -\ln(0^2+1) = -\ln 1 = 0.$$

Lin. Diff. Gleich. 1. Ordnung

Satz. 3.3.8

Aufgabe 4

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$y' + y \underbrace{\tan(x)}_{=g(x)} = \underbrace{\sin(2x)}_{=h(x)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

$$\underline{\underline{y' = a(x)\, y + b(x)}}$$

Linear in y

$$y' = -g(x)\, y + h(x).$$

Satz 3.3.8

Die allgemeine Lösungen sind genau die Funktionen

$$y(x) = K(x)\, e^{-G(x)} + C\, e^{-G(x)}$$

wobei

- $G(x)$ = eine feste Stammfunkt. von $g(x)$
- $K(x)$ = eine feste Stamfkt von $x \longmapsto h(x)\, e^{G(x)}$
- C Konstante.

- $G(x) = ?$ $\qquad g(x) = \tan x$

$$G(x) = \int \tan(x)\, dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos x}\, dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}\, dx$$

$$= -\ln(\cos x).$$

- $x \longrightarrow h(x)\, e^{G(x)} = \sin(2x)\, e^{-\ln(\cos x)}$

$$= \sin(2x)\, e^{\ln \frac{1}{\cos x}}$$

$$= \sin(2x) \cdot \frac{1}{\cos x} = 2\sin(x) \cancel{\cos(x)} \frac{1}{\cancel{\cos x}}$$

$$= 2\sin(x).$$

$$k(x) = \int 2\sin(x)\, dx = -2\cos x.$$

- C = Konstante

<u>Schritt 1</u>: Allgemeine Lösung

$$y(x) = -2\cos x\, e^{-(-\ln \cos x)} + C \cdot e^{-(-\ln \cos x)}$$

$$= -2\cos x \, e^{\ln \cos x} + C\, e^{\ln \cos x}$$

$$= -2 \cos x \cdot \cos x + C \cos x$$

$$\boxed{y(x) = -2\cos^2 x + C \cos x}$$

Schritt 2 : Finde C so dass $y(0) = 1$. (AWPs)

$$y(0) = -2 \cos^2 0 + C \cos 0 .$$

$$= -2 \cdot 1 + C \cdot 1 = -2 + C . \quad \Rightarrow \quad -2 + C = 1$$

$$\boxed{C = 3}$$

$y(0) = 1$

$$\boxed{y(x) = -2\cos^2 x + 3 \cos x}$$

Probe!

Aufgabe 3, Teil 2.

Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = -y^2$$

Lösung:

- Trennen:
$$y' = y - y^2$$
$$\frac{dy}{dx} = y - y^2$$
$$\frac{dy}{y-y^2} = dx$$

- Integrieren:
$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int dx$$

Da $\frac{1}{y-y^2} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y-y^2} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{1-y}$

$$= \ln|y| - \ln|1-y|$$

$$= \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right|.$$

Es folgt: $\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = x + c$ für $c \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0,\ y \neq 1$.

Das heißt: $\left|\frac{y}{y-1}\right| = e^{x+c}$

Jetzt müssen wir $\left|\frac{y}{y-1}\right|$ verstehen:

$$\left|\frac{y}{y-1}\right| = \begin{cases} \frac{y}{y-1} & y<0 \\ \frac{y}{1-y} & y\in(0,1) \\ \frac{y}{y-1} & y>1 \end{cases}$$

Fall 1: $y<0$

$$\frac{y}{y-1} = e^{x+c} \iff y = (y-1)e^{x+c}$$

$$\iff y(1-e^{x+c}) = -e^{x+c}$$

$$\boxed{y = \frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1}.}$$

Diese Lösung $y(x) = \frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1}$ ist definiert nur für x so dass $y(x)<0$.

Da $e^{x+c}>0 \ \forall x\in\mathbb{R} \implies y(x)<0$ genau für x so dass

$e^{x+c}-1<0 \iff e^{x+c}<1$

$\iff x+c<0 \iff \boxed{x<-c}$.

Fall 2: $\quad 0 < y < 1$

$$\frac{y}{1-y} = e^{x+c} \iff y = (1-y)e^{x+c}$$

$$\iff y\,(1+e^{x+c}) = e^{x+c}$$

$$\iff \boxed{y(x) = \frac{e^{x+c}}{1+e^{x+c}}}$$

Da $e^{x+c} > 0 \implies y(x) \in (0,1)$ für alle $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

Fall 3: $\quad y > 1$

$$\frac{y}{y-1} = e^{x+c} \iff y = (y-1)\,e^{x+c}$$

$$\iff y\,(1-e^{x+c}) = -\,e^{x+c}$$

$$\iff \boxed{y = \frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1}}$$

$\cancel{\text{Diese } y(x) > 1 \iff \frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1} > 1 \iff e^{x+c} > e^{x+c}-1}$

$\cancel{x+c>0}$

Wir sehen dass $y(x) > 1$

genau dann wenn $\quad x+c > 0 \iff \boxed{x > -c}$

Interpretation dieses Ergebnisses :

$y(x_0) = y_0$ ein Anfangswertproblem für diese Differentialgleichung :

- Ist $y_0 < 0 \Rightarrow y(x) = \dfrac{e^{x+c}}{1+e^{x+c}}$ mit c so dass $y(x_0) = y_0$.

  $x \in (-\infty, -c)$

- Ist $y_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$. für alle $x \in \mathbb{R}$

- Ist $0 < y_0 < 1 \Rightarrow y(x) = \dfrac{e^{x+c}}{1+e^{x+c}}$ definiert für alle $x \in \mathbb{R}$

  mit c so dass $y(x_0) = y_0$.

- Ist $y_0 = 1 \Rightarrow y(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Ist $y_0 > 1 \Rightarrow y(x) = \dfrac{e^{x+c}}{e^{x+c} - 1}$ definiert für $x \in (-c, +\infty)$

  mit c so dass $y(x_0) = y_0$.