Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Vortragsübung am Mi 23.11.22, Fr 25.11.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Gauß in 3D)
Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 5 \right\}$ ein Zylinder mit Radius $R = 2$ und Höhe $H = 5$. Sei S seine Oberfläche.
Berechnen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, S)$ des Vektorfeldes $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1^3 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ durch S.

Aufgabe 2 (Transformationsatz in 3D)
Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4 - x^2 - y^2 \leqslant z \leqslant 3\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x-z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$.
2. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten.
3. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung die z-Koordinate $\frac{\iiint_K z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_K 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$ des Schwerpunkts von K.

Aufgabe 3 (Differentialgleichung mit getrennten Variablen)

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = -2xy$ mit $y(0) = 1$.

$$\cancel{y' = -2xe^y \quad \text{mit} \quad y(0) = 1}.$$

2. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = -y^2 .$$

(Beispiel einer Bernoulli-Differentialgleichung)

Aufgabe 4 (Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung)
Sei $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y\tan(x) = \sin(2x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 .$$

Aufgabe 1

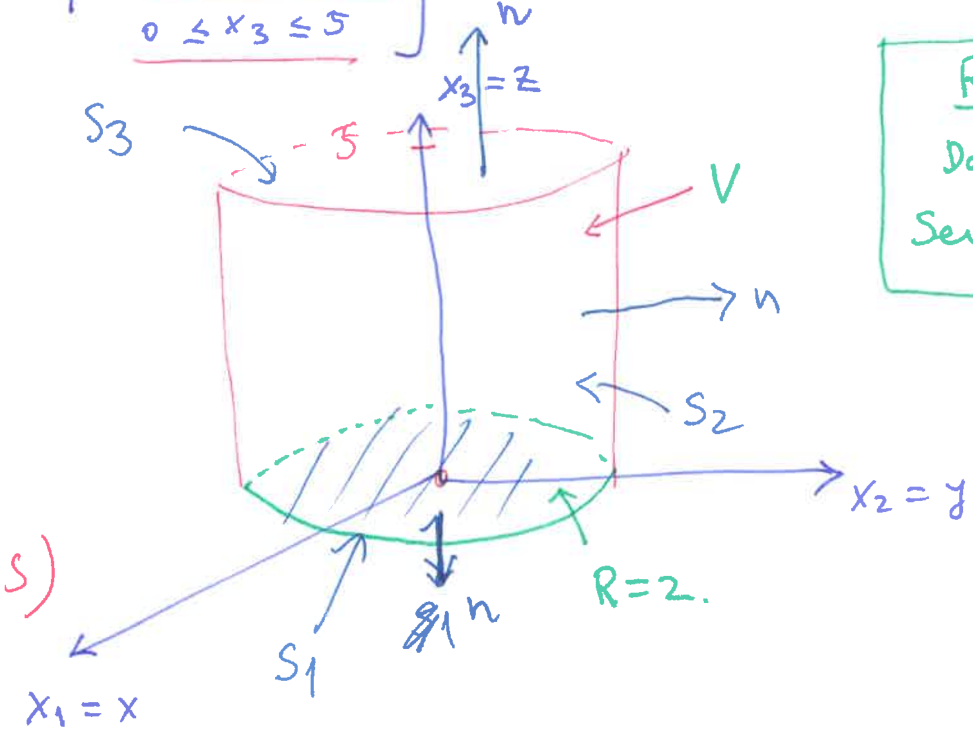
$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ 0 \leq x_3 \leq 5 \end{matrix} \right\}$$

Kreis Radius $R=2$ in $x_1 x_2$-Ebene.

$$S := \partial V$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$



Referenz

Das Kapitel 2.4

Seiten 87–90

Wollen: Ausfluss g durch $S =: A(g,S)$

$S = \partial V$ geschlossene Fläche

$$A(g,S) = \iint_S g \cdot n \, dO = \iiint_V \mathrm{div}(g)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Def. 2.4.1.

äußere Normale zur S.

Satz 2.4.2 Gauß

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

$$\operatorname{div}(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}.$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3) = 3x_1^2 - 1 + 1 = 3x_1^2$$

$$A(g,S) = \iiint_V \operatorname{div}(g)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_V (3x_1^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Zylinder Koordinaten (Referenz: Beispiel 2.3.6).

$$x = x_1 = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le R = 2.$$

$$y = x_2 = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$z = x_3 = x_3 \qquad 0 \le x_3 \le H = 5$$

$$= \int_{x_3=0}^{5} \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 3(r\cos\varphi)^2\, r\, d\varphi\, dr\, dx_3. = \int_{x_3=0}^{5} \left(\int_{r=0}^{2} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} 3r^3 \underline{\cos^2\varphi}\, d\varphi \right) dr \right) dx_3$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \qquad \text{da } \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$= 2\cos^2\varphi - 1 \implies \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = \left[\frac{1}{2}\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} + \left[\frac{1}{4}(\sin 2\varphi)\right]_{\varphi=0}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi - 0) + \frac{1}{4}(0 - 0)$$

$$= \pi$$

$$A(g, S) = \int_{x_3=0}^{5} \left(\int_{r=0}^{2} 3r^3 \cdot \pi \, dr \right) dx_3 = \dots\dots = \overset{60}{\cancel{40}}\,\pi$$

Aufgabe 2

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4-x^2-y^2 \le z \le 3\sqrt{4-x^2-y^2} \}$$

$\cap$

$\mathbb{R}^3$

1. Skizze K in der xz-Ebene

$y=0$

$y = 0$

$$4-x^2 \le z \le 3\sqrt{4-x^2}$$

$4-x^2 = z$

$z = 4-x^2$

Parabola in xz-Ebene.

$z=0$: $4-x^2=0$

$x = \pm 2$

$x=0$: $z=4$

$z = 3\sqrt{4-x^3}$

$z^2 = 9(4-x^2)$

$\frac{1}{9}z^2 + x^2 = 4$

$x^2 + \frac{1}{9}z^2 = 4$

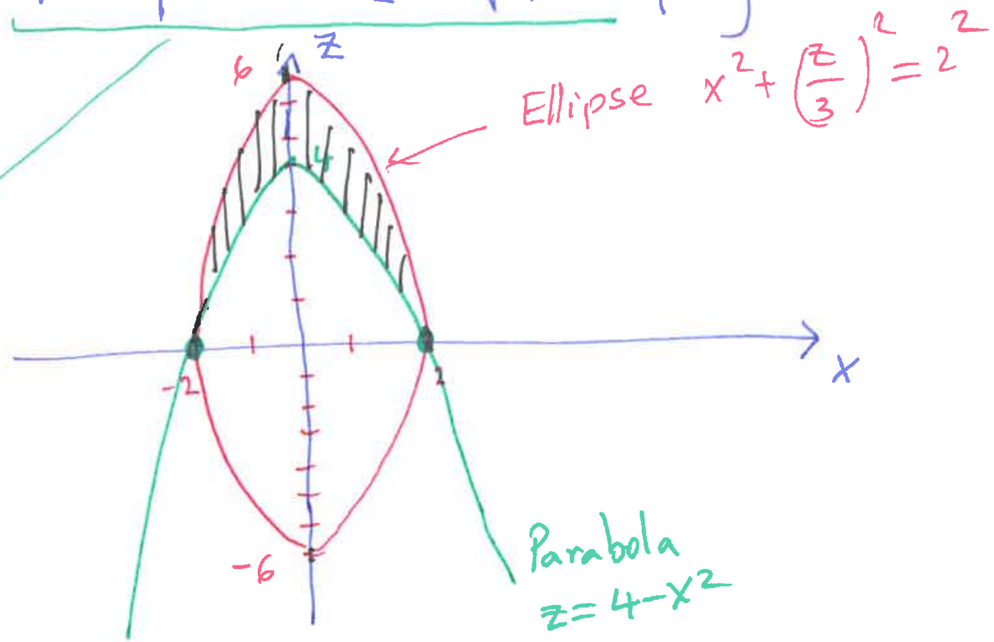
$x^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 2^2$

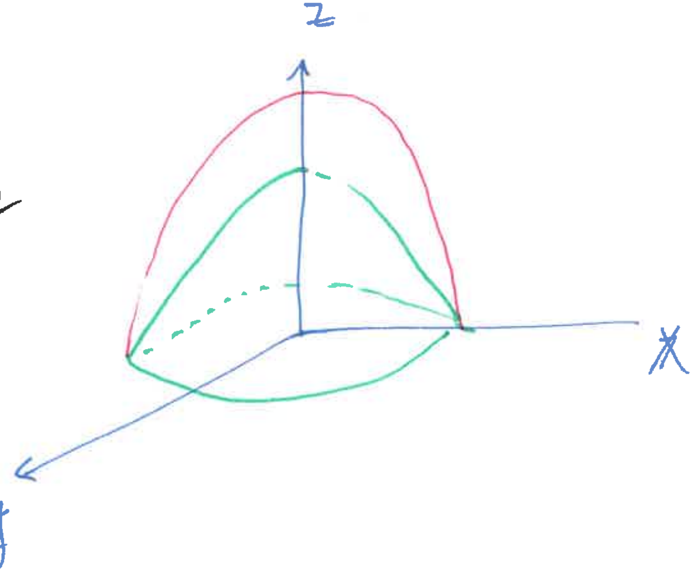
Ellipse in xz-Ebene

$x=0$: $\left(\frac{z}{3}\right)^2 = 2^2$

$\frac{z}{3} = \pm 2$

$z = \pm 6$





2. Parametrisiere K in Zylinderkoordinaten ← Referenz: Beispiel. 2.3.6

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \mathfrak{Z}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Transformation von (r,φ,z)-Koordinaten zu (x,y,z)-Koordinaten

$$\det J\mathfrak{Z}(r,\varphi,z) = r.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} r & 0 \le r \le 2 \\ \varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z & 4-r^2 \le z \le 3\sqrt{4-r^2} \end{array}}.$$

$$4-x^2-y^2 \le z \le 3\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$$

$$4-r^2 \le z \le 3\sqrt{4-r^2}$$

3. Schwerpunkt von K.

Beispiel 2.3.8
Folie 85

$S = (x_S, y_S, z_S)$.

$$x_S = \frac{\iiint_K x \, dx\,dy\,dz}{\operatorname{vol}(K)}, \quad y_S = \frac{\iiint_K y \, dx\,dy\,dz}{\operatorname{vol}(K)}, \quad \boxed{z_S = \frac{\iiint_K z \, dx\,dy\,dz}{\operatorname{vol}(K)}}$$

wobei $\operatorname{vol}(K) = \iiint_K 1 \, dx\,dy\,dz$

Wegen Symmetrie sind $x_S = 0$, $y_S = 0$

$$\operatorname{vol}(K) = \iiint_K 1 \, \boxed{dx\,dy\,dz} = \int_{r=0}^{2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}} \int_{z=4-r^2}^{3\sqrt{4-r^2}} 1 \; r \, dz\,d\varphi\,dr$$

Transformationsatz für Zylinderkoordinaten

$\det J(3)$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{2} \left[z \right]_{z=4-r^2}^{z=3\sqrt{4-r^2}} r\,dr = 2\pi \int_{r=0}^{2} \left(3\sqrt{4-r^2} - (4-r^2) \right) r\,dr$$

$$= 2\pi \left(\int_{r=0}^{2} 3r\sqrt{4-r^2}\,dr - \int_{r=0}^{2} (4-r^2)\,r\,dr \right).$$

Stammfunktion von $3r\sqrt{4-r^2} = -\frac{3}{2}(-2r)(4-r^2)^{1/2}$

ist $\boxed{-(4-r^2)^{3/2}}$

Stammfunktion von $(4-r^2)r$

ist. $-\frac{1}{4}(4-r^2)^2$

$$\rightarrow \operatorname{vol}(K) = 2\pi\left(\left[-(4-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{2} - \left[-\frac{1}{4}(4-r^2)^2\right]_{r=0}^{2}\right)$$

$$= 2\pi\left(0+8-(-0+4)\right) = 8\pi.$$

$$\rightarrow \iiint_K \underbrace{z}_{} \, dx\,dy\,dz = \int_{r=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=4-r^2}^{3\sqrt{4-r^2}} z\,\boxed{r\,dz\,d\varphi\,dr} = \cdots$$

z

Aufgabe 3

$$y' = \underbrace{-2x}_{=g(x)} \cdot \underbrace{y}_{=h(y)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

Referenz:
Section 3.2.
Trennung der Variable
Folien 104-109

Schritt 1: Finde die allgemeine Lösungen zur

$$y' = -2x \cdot y.$$

$y(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)). \\ \text{Finde } y \end{array}}$$

- Trennen $\dfrac{dy}{dx} = -2x \cdot y$

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx.$$

$$y' = \underbrace{g(x) \cdot h(y)}$$

- Integrieren $\ln|y| = -x^2 + c$

$$|y| = e^{-x^2+c} = e^{c} \cdot e^{-x^2}$$

$$y(x) = C e^{-x^2} \quad \text{mit} \quad C > 0 \text{ wenn } y > 0$$
$$C < 0 \text{ wenn } y < 0.$$

$$(\ln(y))' = \frac{1}{y}$$

- Die allgemeine Lösung $y(x) = C\, e^{-x^2}$

- Probe: $y'(x) = C\left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = (-2x)\, C e^{-x^2} = (-2x)\, y(x)$

Schritt 2: Finde die Lösung des AWPs.

$$y(x) = Ce^{-x^2} \implies y(0) = Ce^{-0^2} = C \cdot 1 = C \implies C = 1.$$

AWP $y(0) = 1$.

$\Rightarrow$ Die Lösung des AWPs $\boxed{y(x) = e^{-x^2}}$

Fragen: ① Was die Lösung zum AWP $y(0) = 0$. $\implies C = 0$.

$y(0) = C$

Die Lösung ist $y(x) = 0$.

② Wo ist die Lösung definiert? für alle $x \in \mathbb{R}$.

$y(x) = \frac{1}{x} \to x \in (0, +\infty)$
$x \in (-\infty, 0)$

③ Gibt es andere Lösungen?

Nein! Existenz- und Eindeutigkeit Satz

Peano Picard-Lindelöf.

2.

$$y' - y = -y^2$$

$$y' = y - y^2 = \underset{\substack{\shortparallel \\ g(x)}}{1} \cdot \underbrace{(y - y^2)}_{= h(y)}$$

Aufgabe 4

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$y' + y \underbrace{\tan(x)}_{=g(x)} = \underbrace{\sin(2x)}_{=h(x).}$$

mit $y(0) = 1$.

Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + g(x) \cdot y = h(x)$

Referenz: 3.3.

Satz 3.3.8

Die allgemeine Lösungen sind genau

$$y(x) = k(x)\, e^{-G(x)} + C e^{-G(x)}$$

wobei G = eine Stammfkt. g

k = Stammfkt $x \longmapsto h(x)\, e^{G(x)}$

$C \in \mathbb{R}$

- $g(x) = \tan x$
- $G(x) = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| = -\ln \cos x = \ln \frac{1}{\cos x}$

  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

  $0 < \cos x \leq 1$
- $h(x)\, e^{G(x)} = \sin(2x)\, e^{\ln 1/\cos x}$

  $= \sin(2x) \cdot \frac{1}{\cos x} = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}$

  $= 2 \sin x$

- $K(x) = \int \underbrace{h(x)\, e^{G(x)}} dx = \int 2 \sin(x)\, dx = -2\cos x.$

- Die allgemeine Lösung.

$$y(x) = K(x)\, e^{-G(x)} + C e^{-G(x)}.$$

$$= (-2\cos x)\, e^{-(-\ln \cos x)} + C\, e^{-(-\ln \cos x)}$$

$$= -2\cos x \cdot \cos x + C \cos x = -2\cos^2 x + C \cos x.$$

Probe: Das ist doch eine Lösung unserer DGL.

Schritt 2: Finde die Lösung des AWPs $\boxed{y(0)=1}$

$$y(0) = -2\cos^2 0 + C\cos 0 = -2 + C \cdot 1 = -2 + C.$$

$$y(0) = 1 \iff -2 + C = 1 \quad \text{d. h.} \quad C = 3$$

$$\boxed{y(x) = -2\cos^2 x + 3\cos x}$$

Zusatz 3.3.9.

$$C = y_0 e^{G(x_0)} - K(x_0)$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = y(x_0) = 1.$$

Aufgabe 3, Teil 2.

Finde eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = -y^2$$

Lösung:

- Trennen:

$$y' = y - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y - y^2$$

$$\frac{dy}{y-y^2} = dx$$

- Integrieren:

$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int dx$$

Da $\frac{1}{y-y^2} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y-y^2} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{1-y}$

$$= \ln|y| - \ln|1-y|$$

$$= \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right|.$$

Es folgt: $\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = x + c$ für $c \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0,\ y \neq 1$.

Das heißt: $\left|\dfrac{y}{y-1}\right| = e^{x+c}$

Jetzt müssen wir $\left|\dfrac{y}{y-1}\right|$ verstehen:

$$\left|\frac{y}{y-1}\right| = \begin{cases} \dfrac{y}{y-1} & y<0 \\ \dfrac{y}{1-y} & y\in(0,1) \\ \dfrac{y}{y-1} & y>1 \end{cases}$$

<u>Fall 1</u>: $y<0$

$$\frac{y}{y-1} = e^{x+c} \iff y = (y-1)e^{x+c}$$
$$\iff y(1-e^{x+c}) = -e^{x+c}$$
$$\boxed{y = \frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1}.}$$

Diese Lösung $y(x) = \dfrac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1}$ ist definiert nur für x so dass $y(x)<0$.

Da $e^{x+c}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \implies y(x)<0$ genau für x so dass

$$e^{x+c}-1<0 \iff e^{x+c}<1$$
$$\iff x+c<0 \iff \boxed{x<-c}.$$

__Fall 2:__ $\quad 0 < y < 1$

$$\frac{y}{1-y} = e^{x+c} \iff y = (1-y)e^{x+c}$$
$$\iff y(1+e^{x+c}) = e^{x+c}$$
$$\iff \boxed{y(x) = \frac{e^{x+c}}{1+e^{x+c}}}$$

Da $e^{x+c} > 0 \Rightarrow y(x) \in (0,1)$ für alle $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

__Fall 3:__ $\quad y > 1$

$$\frac{y}{y-1} = e^{x+c} \iff y = (y-1)e^{x+c}$$
$$\iff y(1-e^{x+c}) = -e^{x+c}$$
$$\iff \boxed{y = \frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1}}$$

~~Diese~~ $\cancel{y(x) > 1 \iff \frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1}} > 1 \iff \cancel{e^{x+c} > e^{x+c}-1}$

$\uparrow$
$x+c>0$

Wir sehen dass $y(x) > 1$

genau dann wenn $x+c > 0 \iff \boxed{x > -c}$

<u>Interpretation dieses Ergebnisses</u> :

$\cancel{\ }$ $y(x_0) = y_0$ ein Anfangswertproblem für diese Differentialgleichung :

- Ist $y_0 < 0$ $\Rightarrow$ $y(x) = \dfrac{e^{x+c}}{1+e^{x+c}}$ mit c so dass $y(x_0) = y_0$.

  $x \in (-\infty, -c)$

- Ist $y_0 = 0$ $\Rightarrow$ $y(x) = 0$. für alle $x \in \mathbb{R}$
- Ist $0 < y_0 < 1$ $\Rightarrow$ $y(x) = \dfrac{e^{x+c}}{1+e^{x+c}}$ definiert für alle $x \in \mathbb{R}$

  mit c so dass $y(x_0) = y_0$.

- Ist $y_0 = 1$ $\Rightarrow$ $y(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Ist $y_0 > 1$ $\Rightarrow$ $y(x) = \dfrac{e^{x+c}}{e^{x+c} - 1}$ definiert für $x \in (-c, +\infty)$

  mit c so dass $y(x_0) = y_0$.