Freitag 9.12.22.

Degeratu

Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 4

Vortragsübung am Mi 7.12.22, Fr 9.12.22

Aufgabe 1 (Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' + y' - 2y = 0$ mit $y(0) = 4$, $y'(0) = -5$.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' + 8y' + 16y = 0$.
3. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' + 0{,}2y' + 4{,}01y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Aufgabe 2 (Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 2y' + 101y = 104\mathrm{e}^{x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 11,\ y'(0) = -9\ .$$

Aufgabe 3 (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und spezieller rechter Seite)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = -47\ .$$

Aufgabe 4 (Lineare DGL mit nicht konstanten Koeffizienten)
Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{für } x \in (0, +\infty).$$

1. Gibt es Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung der Form $y(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{R}$?
2. Bestimmen Sie alle Lösungen dieser homogenen Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(x)$. Berechnen Sie ihre Inverse $\mathrm{W}(x)^{-1}$.
4. Wir haben die Bedingung $\mathrm{W}(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.
   Bestimmen Sie hieraus Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.
   Verwenden Sie diese um eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ von $y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x$ zu bestimmen.
5. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{mit} \quad y(1) = 1 \ \text{ und } y'(1) = 1\ .$$

Lineare DGL

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y}_{\text{LS}} = \underbrace{h(x)}_{\text{RS}}.$$

LS (linke Seite)

- $\boxed{a_i(x) = \text{Konstant} = a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le i \le n-1}$

  Konstant

  - charakteristisches Polynom $P(x)$
  - Nullstellen

  Abschnitt 4.3

- $\boxed{a_i(x) = \text{nicht Konstant mindestens für ein } i}$

  nicht Konstant

  - Fundamentalsystem

  Abschnitt 4.1 & 4.2

RS (rechte Seite)

- $\boxed{h(x) = 0}$

  homogen

  Kapitel 4

- $\boxed{h(x) \neq 0}$

  inhomogen

  Kapitel 5

LS	homogen	inhomogen
Konst.	Aufgabe 1	Aufgabe 2 Aufgabe 3 + Blatt 5
nicht Konst.	Aufgabe 4	Aufgabe 4

Aufgabe 1

(1) $1 \cdot y'' + 1 \cdot y' - 2y = 0$ mit $y(0) = 4$ und $y'(0) = -5$

- Konstante Koeff

homogen

- Charakteristisches Polynom

$$p(x) = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 2 = x^2 + x - 2$$

- Nullstellen

$$\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = -2.$$

- reelle Nullstele und verschiedene.

- Fundamentalsystem (mit Satz 4.3.2).

$$f_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$$

- Allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Lösung AWPs.: $y(0) = 4$ und $y'(0) = -5$

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-2\cdot 0} = c_1 + c_2 = 4$$

$$y'(x) = c_1 e^x - 2 c_2 e^{-2x}$$

$$y'(0) = c_1 \cdot 1 - 2 c_2 \cdot 1 = c_1 - 2c_2 = -5$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4 \\ c_1 - 2c_2 &= -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = 1 \quad \text{und} \quad c_2 = 3.$$

$$\boxed{y(x) = e^x + 3e^{-2x}}$$

(2) $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Konstant homogen

- charakt. Polynom

$$P(X) = X^2 + 8X + 16 = (X+4)^2$$

- Nullstelle: $\lambda_1 = \lambda_2 = -4 =: \lambda$ mit Vielfachheit (2)

reell aber nicht verschieden ($\Rightarrow$ Satz 4.3.2 gilt nicht!)

- Fundamentalsystem (Satz 4.4.5.).

$$f_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-4x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = x\,e^{\lambda_1 x} = x\,e^{-4x}$$

- Allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x} = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

③ $y'' + \underbrace{0,2}\, y' + \underbrace{4,01}\, y = 0$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

~~konst~~ · konstant

- charak. Polynom

$$P(X) = X^2 + 0,2\,X + 4,01$$

- Nullstellen

$$\frac{1}{2}\left(-0,2 \pm \sqrt{(0,2)^2 - 4\cdot(4,01)}\right) = -0.1 \pm 2i = \underbrace{-\frac{1}{10} \pm 2i}$$

Komplexe Nullstellen

$\lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{1}{10}} \pm 2i$

- Fundamentalsystem. (mit Satz 4.3.6 / Satz 4.4.5)

$a = -\frac{1}{10}$

$b = 2$. $b = -2$

$$f_1(x) = e^{ax}\cos(bx) = e^{-\frac{1}{10}x}\cos(2x)$$

$\cos(-2x) = \cos(2x)$

$$f_2(x) = e^{ax}\sin(bx). = e^{-\frac{1}{10}x}\sin(2x).$$

$\sin(-2x) = -\sin(2x)$

- Allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1\, e^{-1/10\cdot x}\cos(2x) + C_2\, e^{-1/10\cdot x}\sin(2x) = e^{-1/10\, x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

• AWP: $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$.

$$y(0) = \left(C_1 \underbrace{\cos(2\cdot 0)}_{=1} + C_2 \underbrace{\sin(2\cdot 0)}_{=0}\right) e^{-1/10 \cdot 0}$$

$$= C_1. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C_1 = 0}.$$

$$y(x) = C_2 \sin(2x)\, e^{-1/10 \cdot x}$$

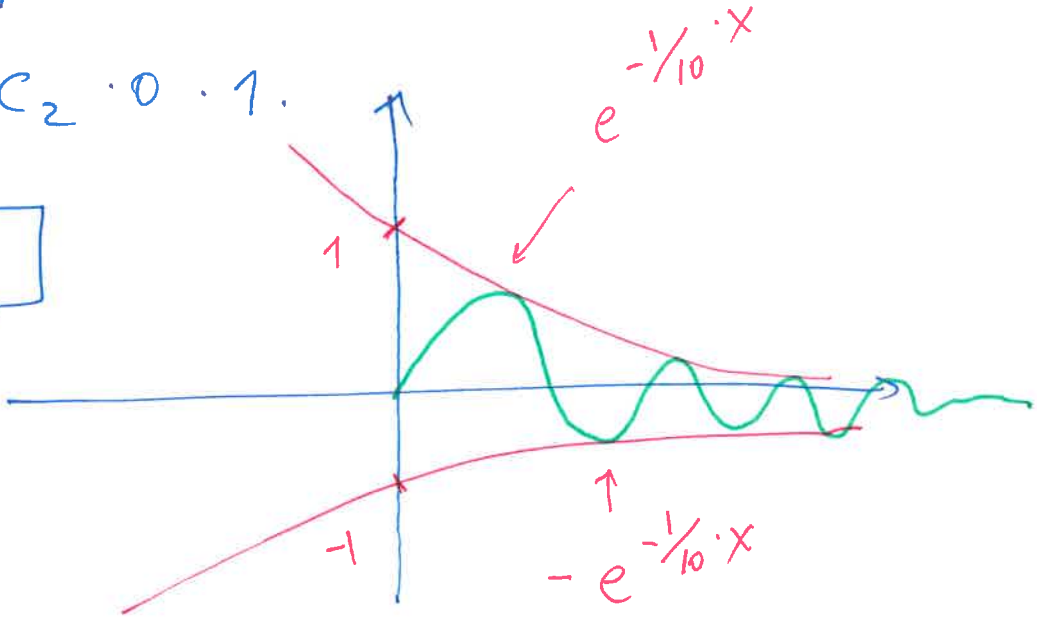
$$y'(x) = 2 C_2 \cos(2x)\, e^{-1/10 \cdot x} - \frac{1}{10} C_2 \sin(2x)\, e^{-1/10 \cdot x}$$

$$y'(0) = 2 C_2 \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{10} C_2 \cdot 0 \cdot 1.$$

$$= 2 C_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C_2 = 1}$$

$$\boxed{y(x) = e^{-1/10\, x} \sin(2x)}$$

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1$$



$h(x)$

~~②~~ Aufgabe 2:

$$y'' + 2y' + 101y = 104e^x \quad \text{mit} \quad y(0) = 11, \quad y'(0) = -9.$$

~~linke~~ rechte Seite $\neq 0$

$h(x) \to$ allgemein

$h(x) \to$ spezielle ~~Rechte~~s

~~linke~~ rechte Seite

Satz 5.3.2

Schritt 1: Finde eine allgemeine homogene Lösung

$$y'' + 2y' + 101y = 0$$

- charak. Polynom

$$P(x) = x^2 + 2x + 101.$$

- Nullstellen

$$\frac{1}{2}\left(-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 101}\right) = -1 \pm 10i$$

$a = -1$

$b = 10$

- Fundamentalsystem (Satz 4.3.6).

$$f_1(x) = e^{ax}\cos(bx) = e^{-x}\cos(10x) \qquad f_2(x) = e^{ax}\sin(bx) = e^{-x}\sin(10x)$$

- Allgemeine homogene Lösung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$f_h(x) = c_1 e^{-x}\cos(10x) + c_2 e^{-x}\sin(10x)$$
$$= \big(c_1\cos(10x) + c_2\sin(10x)\big)e^{-x}$$

Schritt 2 : Finde eine partikuläre Lösung der inhomogen DGL.

$f_p(x) = ?$

- Die rechte Seite $h(x) = 104 \cdot e^{1 \cdot x}$ spezielle Rechte Seite $r(x) e^{\mu x}$.

mit $r(x) = 104$

$\mu = 1.$ Satz 5.3.2.

- $\mu = 1$ ist keine Nullstelle von $P(x)$.

$\Rightarrow$ Fall 1 von Satz 5.3.2.

- Suche eine partikuläre Lösung

$f_p(x) = S(x)\, e^{\mu x}$ mit grad S = grad $r = 0$

$\Rightarrow S(x) = C$.

$f_p(x) = C e^{1 \cdot x}$

Wollen : Finde C (finde $s(x)$) so dass $f_p(x)$ ~~die~~ Lösung der inhom DGL ist.

- $f_p(x) = C e^x$

$f_p'(x) = C e^x$

$f_p''(x) = C e^x$

$f_p'' + 2 f_p' + 101 f_p = 104 e^x$

$C e^x + 2 C e^x + 101 C e^x = 104 e^x \Rightarrow 104\, C = 104$

$\boxed{C = 1}$

$\boxed{f_p(x) = e^x}$

Schritt 3 : Finde die Lösung des AWPs.

- Die allgemeine Lösung

$$y(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= \underline{\left(C_1 \cos(10x) + C_2 \sin(10x)\right)e^{-x}} + \underline{\underline{e^{x}}} \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Finde C_1 und C_2 so dass AWP erfüllt ist.

$y(0) = 11$ und $y'(0) = -9$.

- $y(0) = 11$

$$y(0) = (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 + 1 = C_1 + 1 \quad \Big| \Rightarrow \boxed{C_1 = 10}$$

- $y'(0) = -9$

$$y'(x) = \left(-10C_1 \sin(10x) + 10C_2 \cos(10x)\right)e^{-x} - \left(C_1 \cos(10x) + C_2 \sin(10x)\right)e^{-x} + e^{x}$$

$$y'(0) = 10C_2 - C_1 + 1 = 10C_2 - 9 \quad \Big| \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$y'(0) = -9$$

$$\boxed{y_{AWP}(x) = 10e^{-x}\cos(10x) + e^{x}}$$

Aufgabe 3:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 2 \\ y'(0) &= -3 \\ y''(0) &= -47 \end{aligned}$$

Schritt 1: Finde die homogene Lösung.

- charak. Polynom

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

- Nullstelle: reell $\lambda = -1$

  mit Vielfachkeit $n = 3$.

- Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-x} \qquad f_2(x) = xe^{\lambda x} = xe^{-x} \qquad f_3(x) = x^2 e^{\lambda x} = x^2 e^{-x}$$

- Homogene Lösung

$$f_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^3 e^{-x} = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

<u>Schritt 2</u> : Finde ~~die~~ eine partikuläre Lösung.

- RS $h(x) = 30\, e^{-x}$ mit $r(x) = 30$

  $\mu = -1$.

- $\mu = -1$ ist Nullstelle des charak. Polynomes,

  $\Rightarrow$ wir sind im Fall 2 des Satzes 5.3.2.

  $m = 3$.

Suche $f_p(x) = x^m\, s(x)\, e^{\mu x}$ mit $s(x) = C$.

$$f_p(x) = C\, x^3\, e^{-x}$$

$C = ?$

- $$\begin{aligned} f_p(x) &= c\, x^3 e^{-x} \\ f_p'(x) &= c(3x^2 - x^3)\, e^{-x} \\ f_p''(x) &= c\,(6x - 6x^2 + x^3)\, e^{-x} \\ f_p'''(x) &= c\,(6 - 18x + 9x^2 - x^3)\, e^{-x} \end{aligned}$$

$$f_p'''(x) + 3f_p'' + 3\underline{f_p'} + f_p = 30e^{-x}$$

$$c(6-18x+9x^2-x^3)e^{-x}$$

$$+\ 3c(6x-6x^2+x^3)e^{-x}$$

$$+\ 3c(3x^2-x^3)e^{-x}$$

$$+\ cx^3e^{-x} = 30e^{-x}$$

$$6c = 30 \Rightarrow \boxed{c=5}$$

$$\boxed{f_p(x) = 5x^3e^{-x}}$$

Schritt 3 Finde die Lösung zum AWP

$y(0)=2 \qquad y'(0)=-3 \qquad y''(0)=-47$

- Die allgemeine Lösung

$$y(x) = f_h(x) + f_p(x).$$

$$= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + 5x^3 e^{-x}$$

- Finde c_1, c_2, c_3 so dass AWP erfüllt ist.

- $y(0)=2$

  $y(0) = c_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{c_1 = 2}$

- $y'(0) = -3$

  $y'(x) = \ldots$

  $y'(0) = c_2 - c_1 = c_2 - 2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$

- $y''(0) = -47$

  $y''(x) = \ldots$

  $y''(0) = \ldots$

  $\Rightarrow c_3 = \ldots$

Aufgabe 4

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = x \qquad \text{für} \quad x > 0$$

1. linear DGL – nicht konstanten Koeffizienten
– inhomogen.

① homogene DGL

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = 0 \qquad x > 0.$$

- $y(x) = x^k$

$y'(x) = k x^{k-1}$

$y''(x) = k(k-1) x^{k-2}$

- Einsetzen

$$k(k-1) x^{k-2} + \frac{1}{x} k x^{k-1} - \frac{4}{x^2} \cdot x^k = 0$$

$$(k(k-1) + k - 4) x^k = 0$$

$$k^2 - k + k - 4 = 0$$

$$k^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow k = \pm 2$$

- $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = x^{-2}$ sind Lösungen
- Bilden diese Lösungen ein Fundamentalsystem?
  - Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\det W(x) = x^2(-2x^{-3}) - 2x(x^{-2})$$

$$= -2x^{-1} - 2x^{-1} = \frac{-4}{x} \neq 0 \quad \forall \; x > 0.$$

- $f_1(x), f_2(x)$ Fundamentalsystem
- Die homogene Lösungen

$$f_h(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2} \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) $$W(x)^{-1} = \frac{1}{\det W(x)} \begin{bmatrix} -2x^{-3} & -x \\ -2x & x^2 \end{bmatrix} = -\frac{x}{4} \begin{bmatrix} -2x^{-3} & -x^{-2} \\ -2x & x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2x & x \\ 2x^2 & -x^3 \end{bmatrix}$$

Probe: $$\begin{bmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x^{-1}-2x^{-1} & -1+1 \\ -4x^{-2}+4x^{-2} & -2x^{-1}-2x^{-1} \end{bmatrix} \checkmark$$

(3) $\boxed{\text{Satz } 5.2.1}$

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \leftarrow h(x)$$

$\cancel{x^2 \, c_1'(x)}$ -

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2x^{-2} & x^{-1} \\ 2x^2 & -x^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -x^4 \end{pmatrix}$$

$$c_1'(x) = 1/4 \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = 1/4 \, x$$

$$c_2'(x) = -1/4 \, x^4 \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = -\frac{1}{20} x^5$$

- Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$f_p(x) = c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x)$$
$$= \frac{1}{4} x \cdot x^2 + \left(\frac{-1}{20} x^5\right) \cdot x^{-2}$$
$$= \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{20} x^3 = \frac{1}{5} x^3.$$

(4) AWP

- Die allgemeine Lösung

$$y(x) = f_h(x) + f_p(x)$$
$$= C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + \frac{1}{5} x^3$$

- Anfangswerte

$$\left. \begin{aligned} y(1) &= C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 1 \\ y'(1) &= 2C_1 - 2C_2 + \frac{3}{5} = 1 \end{aligned} \right| \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}, \; C_2 = \frac{3}{10}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{10} x^{-2} + \frac{1}{5} x^3}$$ Probe!