Mittwoch. 7.12.22.

Degeratu Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 4

Vortragsübung am Mi 7.12.22, Fr 9.12.22

Aufgabe 1 (Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' + y' - 2y = 0$ mit $y(0) = 4$, $y'(0) = -5$.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' + 8y' + 16y = 0$.
3. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' + 0{,}2y' + 4{,}01y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Aufgabe 2 (Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 2y' + 101y = 104\mathrm{e}^{x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 11,\ y'(0) = -9\,.$$

Aufgabe 3 (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und spezieller rechter Seite)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = -47\,.$$

Aufgabe 4 (Lineare DGL mit nicht konstanten Koeffizienten)
Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{für } x \in (0, +\infty).$$

1. Gibt es Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung der Form $y(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{R}$?
2. Bestimmen Sie alle Lösungen dieser homogenen Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(x)$. Berechnen Sie ihre Inverse $\mathrm{W}(x)^{-1}$.
4. Wir haben die Bedingung $\mathrm{W}(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.
   Bestimmen Sie hieraus Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.
   Verwenden Sie diese um eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x$ zu bestimmen.
5. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{mit} \quad y(1) = 1 \ \text{ und } y'(1) = 1\,.$$

Lineare DGL

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y}_{\text{LS}} = \underbrace{h(x)}_{\text{RS}}$$

LS. (linke Seite)

RS (rechte Seite).

$\boxed{a_i(x) = \text{Konstant} \ \forall\, 0 \le i \le n-1 \ = a_i \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}).}$

Konstant

↓

- chakteristisches Polynom $P(x)$
- NullStellen.

$\boxed{\text{Abschnitt } 4.3}$

$\boxed{a_i(x) \neq \text{nicht Konstant}}$

- Fundamentale Lösungen

$\boxed{\text{Abschnitt. } 4.1,\ 4.2}$

$\boxed{h(x) = 0}$

homogen

Kapitel 4

$\boxed{h(x) \neq 0}$

inhomogen

$\boxed{\text{Kapitel 5}}$

RS \ LS	homogen	inhomogen
Konst.	Aufgabe 1	Aufgabe 2 Aufgabe 3 + Blatt 5
nicht Konst.	Aufgabe 4	Aufgabe 4

Aufgabe 1 : RS = 0 $\Rightarrow$ homogen $(h(x) = 0)$

LS : $a_i(x)$ = konstant.

① $1 \cdot y'' + 1 \cdot y' - 2y = 0$ mit $y(0) = 4$, $y'(0) = -5$

- Charakteristisches Polynom

$$P(X) = 1 \cdot X^2 + 1 \cdot X - 2 = X^2 + X - 2.$$

- Nullstellen $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{9}\right)$

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2.$$

- Fundamentalsystem :

Die Nullstellen sind beide reelle und verschieden. $\Rightarrow$ (mit Satz 4.3.2).

$$f_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x \quad \text{und} \quad f_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$$

- Allgemeine Lösung :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \quad \text{für} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- AWP: $\quad y(0) = 4 \quad$ und $\quad y'(0) = -5$

$$y(0) = C_1 e^{0} + C_2 e^{-2\cdot 0} = C_1 + C_2 \xrightarrow{y(0)=4} C_1 + C_2 = 4$$

$$y'(x) = C_1 e^{x} - 2 C_2 e^{-2x}$$

$$y'(0) = C_1 - 2 C_2 \xrightarrow{y'(0)=-5} C_1 - 2C_2 = -5$$

$C_1 = 1$ und $C_2 = 3$

$$\boxed{y(x) = e^{x} + 3e^{-2x}}$$

② $y'' + 8y' + 16y = 0$

- Charakteristisches Polynom

  $$P(X) = X^2 + 8X + 16 = (X+4)^2$$

- Nullstellen

  $$\frac{1}{2}\Big(-8 \pm \sqrt{\underbrace{8^2 - 4\cdot 16}_{=0}}\Big) = -4 \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -4.$$

  reell aber nicht verschieden (Satz 4.3.2 gilt nicht)

- Fundamentalsystem (Satz 4.4.5).

  $$f_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = x\, e^{\lambda_1 x}$$

- Allgemeine Lösung

  $$y(x) = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, x\, e^{\lambda_2 x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Probe!

③ $y'' + 0{,}2\, y' + 4{,}01\, y = 0$ mit $y(0) = 0,\quad y'(0) = 2.$

- Charakteristisches Polynom

$$P(X) = X^2 + 0{,}2\, X + 4{,}01.$$

- Nullstellen

$$\frac{1}{2}\left(-0{,}2 \pm \sqrt{(0{,}2)^2 - 4 \cdot 4{,}01}\right) = -0{,}1 \pm 2i = -\frac{1}{10} \pm 2i$$

$$P(X) = \left(X - \left(-\tfrac{1}{10} + 2i\right)\right)\left(X - \left(-\tfrac{1}{10} - 2i\right)\right).$$

Komplexe Nullstellen.

$$\lambda = \underbrace{-\frac{1}{10}}_{=a} + \underbrace{2}_{=b}\, i$$

- ~~Satz~~ Fundamental System (mit Satz 4.3.6) Satz 4.4.5

$$f_1(x) = e^{ax} \cos(bx) = e^{-\frac{1}{10} \cdot x} \cos(2x)$$

$$f_2(x) = e^{ax} \sin(bx) = e^{-1/10\, x} \sin(2x).$$

- Allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1\, e^{-1/10 \cdot x} \cos(2x) + C_2\, e^{-1/10 \cdot x} \sin(2x).$$

$\cos(-2x) = \cos(2x)$

$\sin(-2x) = -\sin(2x)$

- AWP: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

$$y(0) = C_1 \, e^{-1/10 \cdot 0} \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_{=1} + C_2 \, e^{-1/10 \cdot 0} \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_{=0}$$

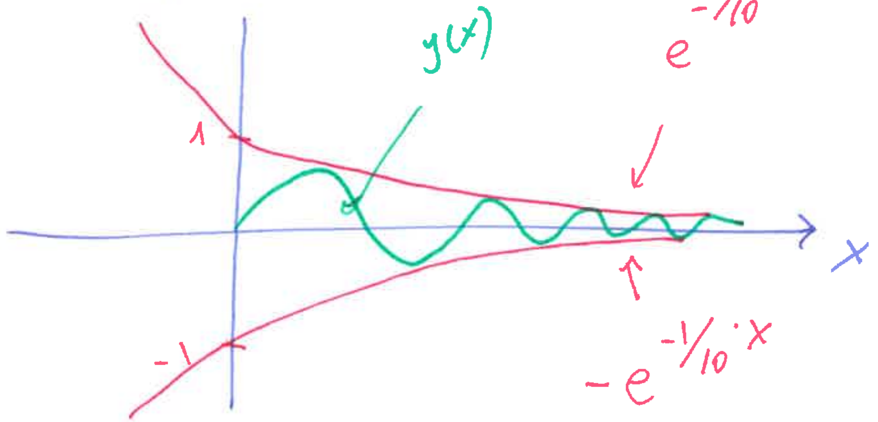
$$= C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 0}$$

$$y(x) = C_2 \, e^{-1/10 \cdot x} \sin(2x)$$

$$y'(x) = C_2 \left(-\frac{1}{10} e^{-1/10 \cdot x} \sin(2x) + 2 e^{-1/10 \cdot x} \cos(2x) \right).$$

$$y'(0) = C_2 \left(0 + 2 \right) = 2 C_2 \qquad y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = 1}$$

$$y(x) = e^{-1/10 \cdot x} \sin(2x).$$



Aufgabe 2

$r(x) = 104$ Satz 5.3.2.

$\mu = 1$

$$y'' + 2y' + 101y = 104e^{x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 11 \quad \text{und} \quad y'(0) = -9.$$

LS: konstanten koeff

RS: $h(x) = 104e^{x}$ inhomogen.

Schritt 1: Finde die allgemeine homogene Lösung.

$$y'' + 2y' + 101y = 0$$

- charak. Polynom

$$P(x) = x^2 + 2x + 101$$

$$a + ib = -1 + i(10).$$

- Nullstellen

$$\frac{1}{2}\left(-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 101}\right) = -1 \pm 10 \cdot i$$

- Fundamentalsystem (Satz 4.3.6)

$$f_1(x) = e^{-1 \cdot x}\cos(10x) \qquad f_2(x) = e^{-1 \cdot x}\sin(10x).$$

- homogene Lösung

$$f_h(x) = C_1 e^{-x}\cos(10x) + C_2 e^{-x}\sin(10x) \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2 : Finde eine partikuläre Lösung der Inhomogenen DGL.

- Die RS ist $h(x) = 104\, e^{1\cdot x}$

  mit $r(x) = 104$

  $\mu = 1$

- $\mu = 1$ ist keine Nullstelle des charak. Polynom $P(x)$.

$\Longrightarrow$ Fall 1 von Satz 5.3.2.

- Suche eine partik. Lösung

  $f_p(x) = s(x)\, e^{\mu \cdot x}$ mit $\operatorname{grad} s = \operatorname{grad} r = 0$

  $\underline{f_p(x) = C e^x}$ $\boxed{\begin{array}{l} s(x) = C \\ \mu = 1 \end{array}}$

$\boxed{h(x) = \text{allgemein}}$

- Variation der Konstanten

$f_p(x) = C_1(x)\, e^{-x} \cos(10x) + C_2(x)\, e^{-x} \sin(10x)$

Finde $C_1(x)$ und $C_2(x)$ s.d. f_p Lösung.

$\boxed{h(x) \quad \text{Spezielle Rechte Seite}}$

$h(x) = r(x)\, e^{\mu x}$ mit $r(x)$ ein Polynom.

$\boxed{\text{Satz } 5.3.2}$

$h(x) = r(x)\, e^{\mu x} \begin{array}{l} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{array}$

- $f_p(x) = C e^x$

  $f_p'(x) = C e^x$

  $f_p''(x) = C e^x$

$f_p'' + 2 f_p' + 101 f_p = 104\, e^x$

$C e^x + 2 C e^x + 101 C e^x = 104\, e^x$

$104\, C = 104 \Longrightarrow C = 1.$

- $\boxed{f_p(x) = e^x}$

Schritt 3 : Finde die Lösung des AWPs.

$$\boxed{f_p(x) = e^x}$$

- Die allgemeine Lösung

$$y(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= \underbrace{C_1 e^{-x} \cos(10x) + C_2 e^{-x} \sin(10x)}_{} + e^x .$$

- $y(0) = 11$

$$y(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 + 1 = C_1 + 1 \quad \Big| \Rightarrow \boxed{C_1 = 10}$$

- $y'(0) = -9$.

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} \cos(10x) - 10 C_1 e^{-x} \sin(10x)$$

$$- C_2 e^{-x} \sin(10x) + 10 C_2 e^{-x} \cos(10x)$$

$$+ e^x$$

$$y'(0) = -C_1 \cancel{+10} + 10 C_2 + 1 \underset{C_1 = 10}{=} -10 + 10 C_2 + 1 = -9 + 10 C_2$$

$$y'(0) = -9$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

- $$\boxed{y_{AWP}(x) = 10 e^{-x} \cos(10x) + e^x}$$

Aufgabe 3 : $\underbrace{y''' + 3y'' + 3y' + y}_{\substack{LS \\ \text{homogen}}} = \underbrace{30e^{-x}}_{\substack{RS. \\ \text{speziell.}}}$ mit $y(0) = 2$
$y'(0) = -3$
$y''(0) = -47.$

Schritt 1 : Finde die homogene Lösung.

- charak. Polynom.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1. = (x+1)^3$$

- Nullstelle : reel $\lambda = -1$
  mit Vielfachheit $n = 3$.

- Fundamentalsystem. (Satz 4.4.5.).

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = x e^{-x}, \quad f_3(x) = x^2 e^{-x}$$

- homogene Lösung

$$f_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}. \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2 : Finde eine partikuläre Lösung.

- RS $h(x) = 30\, e^{-x} = r(x)\, e^{\mu x}$ $\quad r(x) = 30$, $\mu = -1$.

- Da $\mu = -1$ eine Nullstelle des charak. Polynom ist

Sind wir im Fall 2 des Satzes 5.3.2.

$\Rightarrow$ Suche eine Lösung der Art

$$f_p(x) = x^m\, s(x)\, e^{\mu x}$$

wobei
- $m = 3$
- $s(x)$ Polynom gleiche grad wie $r(x)$ $\Rightarrow s(x) = C \in \mathbb{R}$.
- $\mu = -1$

$$f_p(x) = C\, x^3 e^{-x}.$$

- $f_p(x) = C\, x^3 e^{-x}$

$f_p'(x) = C\,(3x^2 - x^3)\, e^{-x}$

$f_p''(x) = C\,(6x - 6x^2 + x^3)\, e^{-x}$

$f_p'''(x) = C\,(6 - 18x + 9x^2 - x^3)\, e^{-x}$

$$\boxed{f_p''' + 3f_p'' + 3f_p' + f_p = 30\, e^{-x}}$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{C\,(6 - 18x + 9x^2 - x^3)\, e^{-x}}_{f_p'''} + \underbrace{3C\,(6x - 6x^2 + x^3)\, e^{-x}}_{3 f_p''} + \underbrace{3C\,(3x^2 - x^3)\, e^{-x}}_{3 f_p'} + \underbrace{C\, x^3 e^{-x}}_{f_p} = 30\, e^{-x}$$

$\Rightarrow 6C = 30 \Rightarrow \boxed{C = 5}$ $\quad \boxed{f_p(x) = 5x^3 e^{-x}}$

Schritt 3 : Finde die Lösung zum AWP

$$y(0)=2, \quad y'(0)=-3, \quad y''(0)=-47$$

- Die allgemeine Lösung

$$y(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x} + 5x^3 e^{-x}$$

$$= \underline{(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + 5x^3) e^{-x}}.$$

- $Y(0) = 2$

  $Y(0) = C_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = 2}$

- $Y'(0) = -3$

  $y'(x) = \ldots$

  $Y'(0) = C_2 - C_1 = C_2 - 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_2 = -1}$

- $Y''(0) = -47$

  $Y''(x) = \ldots$

$$Y''(0) \overset{??}{=} 2C_3 + 4 \Rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{51}{2}}$$

Aufgabe 4

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = x \quad \text{für} \quad x>0$$

- lineare DGL — nicht konstanten Koeffizienten
- inhomogen.

① homogene DGL

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = 0 \qquad x>0.$$

- $y(x) = x^k$

  $y'(x) = k x^{k-1}$

  $y''(x) = k(k-1) x^{k-2}$

- Einsetzen

$$k(k-1) x^{k-2} + \frac{1}{\cancel{x}} k x^{k-1} - \frac{4}{x^2} \cdot x^k = 0$$

$$\left(k(k-1) + k - 4\right) x^k = 0$$

$$k^2 - k + k - 4 = 0$$

$$k^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow k = \pm 2$$

- $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = x^{-2}$ sind Lösungen
- Bilden diese Lösungen ein Fundamentalsystem?
  - Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\det W(x) = x^2(-2x^{-3}) - 2x(x^{-2})$$

$$= -2x^{-1} - 2x^{-1} = \frac{-4}{x} \neq 0 \quad \forall \; x>0.$$

- $f_1(x), f_2(x)$ Fundamentalsystem
- Die homogene Lösungen

$$f_h(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) $W(x)^{-1} = \dfrac{1}{\det W(x)} \begin{bmatrix} -2x^{-3} & -x \\ -2x & \cancel{2}x^2 \end{bmatrix} = -\dfrac{x}{4} \begin{bmatrix} -2x^{-3} & -x^{-2} \\ -2x & x^2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 2x & x \\ 2x^2 & -x^3 \end{bmatrix}$

Probe: $\begin{bmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x^{-1}-2x^{-1} & -1+1 \\ -4x^{-2}+4x^{-2} & -2x^{-1}-2x^{-1} \end{bmatrix}$ ✓

(3) $\boxed{\text{Satz } 5.2.1}$

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \leftarrow h(x)$$

~~$x^2\, c_1'(x)$~~ -

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2x^{-2} & x^{-1} \\ 2x^2 & -x^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -x^4 \end{pmatrix}$$

$c_1'(x) = 1/4 \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = 1/4\, x$

$c_2'(x) = -1/4\, x^4 \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = -\frac{1}{20} x^5$

- Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$f_p(x) = c_1(x)\, f_1(x) + c_2(x)\, f_2(x)$$
$$= \frac{1}{4} x \cdot x^2 + \left(\frac{-1}{20} x^5\right) \cdot x^{-2}$$
$$= \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{20} x^3 = \frac{1}{5} x^3.$$

(4) AWP

- Die allgemeine Lösung

$$y(x) = f_h(x) + f_p(x)$$
$$= c_1 x^2 + c_2 x^{-2} + \frac{1}{5} x^3$$

- Anfangswerte

$y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{5} = 1$

$y'(1) = 2c_1 - 2c_2 + \frac{3}{5} = 1$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{3}{10}$

$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{10} x^{-2} + \frac{1}{5} x^3}$ Probe!