Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 5

Vortragsübung am Mi 21.12.22

Aufgabe 1 (Die Laplace-Transformation)
Bestimmen Sie die Laplace-Transformationen der folgenden Funktionen.

1. $f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{falls } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

2. $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(3t)$.

3. $f(t) = \sin(t)^2$.

Aufgabe 2 (Laplace-Transformation und Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y'' - y = t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe 3 (Faltung und Umkehrbarkeit der Laplace-Transformation)

1. Bestimmen Sie die Funktion $f(t)$, welche als Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(\cancel{h}f(t)) = F(s)$ mit $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ hat.

2. Benutzen Sie die Faltung, um die Funktion $h(t)$, welche als Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(h(t)) = H(s)$ mit $H(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$ hat, zu finden.

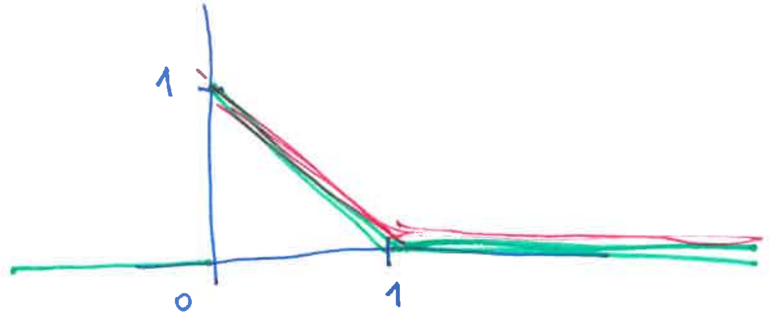
Aufgabe 4 (Laplace-Transformation und Differentialgleichungen, 2)
Finden Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

Verwenden Sie einen Ansatz nach Art der rechten Seite. Vergleichen Sie beide Methoden.

Aufgabe 1

① $f(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Mit der Definition:

$$F(s) = \int_{t=0}^{+\infty} f(t)\, e^{-s\cdot t}\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} (1-t)\, e^{-s\cdot t}\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} \left(e^{-s\cdot t} - t\cdot e^{-s\cdot t}\right) dt$$

Laplace-Transformation

$f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(f) := F \qquad F(s) := \int_{t=0}^{+\infty} f(t)\, e^{-ts}\, dt$

$\mathcal{L}^{-1}(F) = f$

$f(t)$ $\longrightarrow$	$\mathcal{L}(f)(s) = \boxed{F(s)}$
$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = f(t)$ $\longleftarrow$	$F(s)$
$f(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s}$
$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{s-a}$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
$f(t) = \sin(\omega t)$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$f(t) = \cos(\omega t)$	$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
$f(t) = e^{at}\cos(\omega t)$	
$f(t) = e^{at}\sin(\omega t)$	

$$= \underbrace{- \frac{e^{-st}}{s} \Bigg|_{t=0}^{t=1}}_{= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s}} - \underbrace{\int_{t=0}^{t=1} t \cdot \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right)' dt}_{= \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_{t=0}^{t=1} 1 \cdot \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) dt} \qquad (2)$$

$$= 1 \cdot \frac{e^{-s}}{-s} - 0 - \frac{e^{-st}}{s^2} \Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} - \left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right).$$

$$= \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}.$$

3

(2) $f(t) = e^{-t} \cos(3t)$

$f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$

$a = -1$

$\omega = 3$.

$F(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$

$\Downarrow$

$$F(s) = \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2 + 3^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} = \frac{s+1}{s^2+2s+10}$$

(3) $f(t) = \sin^2 t$

Methode 1 : $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$. $\Rightarrow$ $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

$$\mathcal{L}(\sin^2(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right)$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(1) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos 2t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\frac{4}{s(s^2+4)}$$

$$= \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Methode 2: Benutze Laplace-Transf. der Ableitungen

Satz 5.4.10. $\cancel{\mathcal{L}(f(t)) = F(s)}$ $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

① • $\mathcal{L}(f'(t)) = s\,\mathcal{L}(f) - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$.

② • $\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\,\mathcal{L}(f) - s f(0) - f'(0) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$

$\mathcal{L}(\sin^2(t)) = ?$

$f(t) = \sin^2(t)$ $\qquad f(0) = 0$.

$f'(t) = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$ $\qquad f'(0) = 0$.

$$\mathcal{L}(\sin(2t)) = \frac{2}{s^2+2^2} = \boxed{\frac{2}{s^2+4}}$$

$$\|$$

$$\mathcal{L}((\sin^2(t))') \overset{①}{=} \boxed{s\,\mathcal{L}(\sin^2(t))} - \underbrace{\sin^2(0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad s\,\mathcal{L}(\sin^2 t) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}(\sin^2 t) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Aufgabe 2

$$y'' - y = t \qquad \text{mit } y(0)=1, \quad y'(0)=1$$

Lösung: Sei $f(t)$ ~~eine~~ die Lösung dieses AWPs.

$$\boxed{f''(t) - f(t) = t \quad \text{und} \quad f(0)=1, \quad f'(0)=1.}$$

Schritt 1: Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\big(f''(t) - f(t)\big) = \mathcal{L}(t).$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) - \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t)$$

$$\left(s^2 F(s) - s - 1\right) - F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2-1)\,F(s) = s + 1 + \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(f'') = s^2 F(s) - s\,f(0) - f'(0)$$
$$= s^2 F(s) - s \cdot 1 - 1$$
$$= s^2 F(s) - s - 1$$

2.2

Schritt 2:

$$F(s) = \frac{1}{s^2-1}\left(s+1+\frac{1}{s^2}\right).$$

$$= \frac{\cancel{s+1}}{(s-1)\cancel{(s+1)}} + \frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

$$= \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\right)$$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

$$= \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2}$$

Schritt 3: Bestimme f so dass $\mathcal{L}(f) = F$, d.h. $f = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^{+t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t^{\cancel{2}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

$$f(t) = \frac{3}{2} e^{+t} - \frac{1}{2} e^{-t} - t^{\cancel{2}}$$

Schritt 4: Probe!

$$\cancel{f(0) = \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} - 0^{2} = 1} \quad \checkmark$$

$$\cancel{f'(t) = -\frac{3}{2} e^{+t} + \frac{1}{2} e^{-t} - 2t}$$

$$\cancel{f'(0) = -\frac{3}{2} -}$$

$$f(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 1 \quad \checkmark$$

$$f'(t) = \frac{3}{2} \cdot e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t} - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$f''(t) = \frac{3}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$f''(t) - f(t) = \frac{3}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t} - \left(\frac{3}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t} - t \right)$$

$$= t \quad \checkmark$$

Aufgabe 3 :

3.1

① $f(t) = ?$ $\qquad \mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$\omega = 1$

$f(t) = \sin \omega t \Rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$

$\Rightarrow f(t) = \sin t$

② $h(t) = ?$ $\qquad \mathcal{L}(h(t)) = H(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{= \mathcal{L}(f(t))} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\mathcal{L}(g(t))}$

Faltung

$f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f * g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$(f * g)(t) := \int_{\tau=0}^{t} f(t-\tau) g(\tau) \, d\tau$

$\Rightarrow h(t) = (f * g)(t)$

Für uns $f(t) = g(t) = \sin t$

$$h(t) = \int_{\tau=0}^{t} \underbrace{\sin(t-\tau)}_{= f(t-\tau)} \underbrace{\sin \tau}_{= g(\tau)} \, d\tau = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\cos(t-\tau-\tau) - \cos(t-\tau+\tau)}{2} \, d\tau$$

$$= \int_{\tau=0}^{t} \frac{1}{2} \left(\cos(t-2\tau) - \cos t \right) d\tau$$

$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \left(\cos(a-b) - \cos(a+b) \right)$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

3.2

$$= \frac{1}{2}\int_{z=0}^{t} \underbrace{\cos(t-2z)}_{\left(-\frac{1}{2}\sin(t-2z)\right)'}\,dz - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{z=0}^{t} \cos t\, dz}$$

$$= \cos t \cdot (t-0)$$

$$\int_{z=0}^{t} \cos t\, dz$$

$$= \cos t \int_{z=0}^{t} 1\cdot dz$$

$$= \cos t \cdot [z]_{z=0}^{t}$$

$$= \cos t \cdot (t-0)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(t-2z)\right)\Big|_{z=0}^{t} - \frac{1}{2}t\cos t$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\underbrace{\sin(t-2t)}_{=\sin(-t) = -\sin t} - \sin t\right) - \frac{1}{2}t\cos t$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-2\sin t\right) - \frac{1}{2}t\cos t = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

$$\boxed{h(t) = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t}$$

Aufgabe 4: $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ mit $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Lösung: Sei $f(t)$ die Lösung dieses AWPs.

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-t} \quad \text{mit} \quad f(0) = -1, \; f'(0) = 1.$$

Schritt 1: Laplace - Transformation

$$\mathcal{L}(f''(t)) + 2\,\mathcal{L}(f'(t)) + \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{-t})$$

$$\left(s^2F(s) - s\underbrace{f(0)}_{=-1} - \underbrace{f'(0)}_{=1}\right) + 2\left(sF(s) - \underbrace{f(0)}_{=-1}\right) + F(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+2s+1)F(s) + s - 1 + 2 = \frac{1}{s+1}$$

$$(s+1)^2 F(s) + s + 1 = \frac{1}{s+1}$$

Schritt 2: $F(s) = -\dfrac{s+1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{(s+1)^3}$

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^3}$$

Schritt 3 : Finde $f(t)$ mit $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

$$f(t) = e^{at}t^n \Rightarrow F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^3}\right) = e^{-t}\frac{t^2}{2}.$$

$n = 2$
$a = -1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-t}t^2\right).$$

Es folgt : $F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^3}$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}t^2.$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right)e^{-t}$$

Schritt 4 : Probe!

$f(0) = (0-1)\cdot 1 = -1$ ✓
$f'(t) =$

$f'(0) = \dots = 1$
$f''(t) = \dots$

Vergleich mit dem Ansatz nach Art der rechten Seite

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \qquad y(0) = -1, \; y'(0) = 1.$$

- charackt. Polynomial

$$P(X) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$$

- Nullstelle : $\lambda = -1$ Doppelte Nullstelle $m = 2$
- Fundamental system : $e^{-t}, \; t e^{-t}$
- Homogene Lösung : $f_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Finde partikuläre Lösung : $f_p(t) = c\, t^2 e^{-t}$ mit $c \in \mathbb{R}$

$\uparrow$ rechte Seite e^{-t} $-1 = \lambda$ $m = 2.$ (Satz. 5.3.2)

Finde c so dass

$f_p(t)$ Lösung

..... $\boxed{c = \frac{1}{2}}$

- Allgemeine Lösung : $f(t) = f_h(t) + f_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$
- Finde c_1, c_2 so dass Lösung AWPs. ...... $\boxed{c_1 = -1 \text{ und } c_2 = 0}$

$$f(t) = -e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

$$\boxed{f(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right) e^{-t}.}$$