Freitag .

Degeratu — Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Vortragsübung am Mi 18.01.23, Fr 20.01.23

Aufgabe 1 (homogenes DGS; A diagonalisierbar) $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ EW $\rightarrow$ ① $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ② $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ③ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

Sei A je eine der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

Aufgabe 2 (homogenes DGS; A nicht diagonalisierbar)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 \end{aligned} \; .$$

Aufgabe 3 (inhomogenes DGS; Variation der Konstanten)

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 - 6\mathrm{e}^{-2x} \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + 2\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung. Bestimmen Sie dann die Lösung des Anfangswertproblems: $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

Aufgabe 4 (Fourier Rechnung)

Seien die 2π-periodischen Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

für $-\pi < x \leqslant \pi$.

1. Skizzieren Sie f und g auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Entwicklen Sie f und g in ihre Fourier-Reihen.
3. In welchen Punkten konvergieren die Fourier–Reihen? Wogegen?
4. Werten Sie die Fourier–Reihen in geeigneten Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ aus und bestimmen Sie so explizit den Grenzwert der Reihen
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}.$$
5. Bestimmen Sie die Ableitungen f' und g' und ihre Fourier–Reihen.
In welchem Fall gilt die Ableitungsregel aus Satz 7.4.7? In welchem nicht?

Systeme von Differentialgleichungen (DGS)

$$(*) \qquad \boxed{y'(x) = A(x)\, y(x) + b(x)}$$

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{Vektor-Funktion}$$

$$x \longmapsto y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} = M(n \times n, \mathbb{R}) \qquad \text{Matriz-Funktion}$$

$$x \longmapsto A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{Vektor-Funktion}$$

$$(**) \qquad \begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)\, y_1(x) + \cdots + a_{n1}\, y_n(x) + b_1(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = \cdots \end{cases}$$

DGS $\boxed{y'(x) = A(x)\, y(x) + b(x)}$

$b(x) = 0$ $\qquad$ $b(x) \neq 0$

homogene DGS $\boxed{y'(x) = A(x)\, y(x)}$ $\qquad$ $\boxed{y'(x) = A(x) y(x) + b(x)}$ inhomogen

$A(x) = A$ konst.

HM3

homogen DGS mit konst. Koeff. $\boxed{y'(x) = A\, y(x)}$ $\qquad$ $\boxed{y'(x) = A\, y(x) + b(x)}$ inhomogen DGS mit konst Koeff.

HM1 $\qquad$ HM1 $\qquad$ Aufgabe 3

explizite Lösungen mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A

A

diagonaliesierbar $\qquad$ nicht diagonaliesierbar

Aufgabe 1 $\qquad$ Aufgabe 2

Aufgabe 1:

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

- Eigenwerte:

$$P_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda \underline{E}\right)$$ charakteristisches Polynom

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$= (2-\lambda)(4-\lambda) - (-1)(-3)$$

$$= 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Nullstellen $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = 1 \\ \searrow \lambda_2 = 5 \end{array}$$

- Eigenvektoren.

- $\underline{\lambda_1 = 1}$ $\qquad 0 \neq v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad A v_1 = \lambda_1 v_1$

d.h. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = a \\ -a + 4b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = 0 \\ -a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = 3b}$$

Eigenraum mit Eigenwert $\lambda_1 = 1$ $= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \ a = 3b \right\}$

Wir nehmen $b = 1$ $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.}$ $= \left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{R} \right\}$

- $\lambda_2 = 5$: $\Rightarrow$ Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Fundamentalsystem : <u>Die EW</u>: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ v_1, v_2 $\Rightarrow$ v_1, v_2 sind linear unabhängig $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ Basis

$\Rightarrow A$ ~~...~~ reelle diag

$\Rightarrow$ Wir sind in der Annahme von Satz 6.1.5.

$$e^{\lambda_1 x} \cdot v_1 \quad \text{und} \quad e^{\lambda_2 x} \, v_2 .$$

D.h. $$e^{1 \cdot x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{5x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Die allgemeine homogene Lösung ist

$$c_1 \, e^{x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \, e^{5x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 3e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3e^{x} & -e^{5x} \\ e^{x} & e^{5x} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

② $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$y'' + 2y' + y = 0$ Differentialgleichung

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$: $\underline{\underline{e^{-x}}}$ und $\underline{\underline{xe^{-x}}}$

- Eigenwerte sind : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
- Eigenvektoren : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. unabhängig.

  $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ Basis

- Fundamentalsystem (mit Satz 6.1.5).

  $e^{-1x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e^{-1 \cdot x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Die allgemeine homogene Lösung

$$c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

③ $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

- Eigenwerte : $\lambda_1 = -2+i$ und $\lambda_2 = -2-i$ $\qquad \lambda_1 = \lambda$

- Eigenvektore : $\lambda_1 \rightsquigarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

  $\lambda_2 \rightsquigarrow w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\lambda = \underbrace{-2}_{=\alpha} + i \cdot \underbrace{1}_{\beta} =: \lambda_1$

$\bar{\lambda} = -2 - i = \lambda_2$

$w = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v}$

- Fundamentalsystem. (Bemerkung 6.1.6)

$$e^{\lambda x} w = e^{(-2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{Komplexe Vektor-Funktion}$$

$$\boxed{Re(e^{\lambda x} w)} = Re\left(\underline{e^{(-2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} \right) = e^{-2x} \left(\cos(1 \cdot x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(1 \cdot x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{Im(e^{\lambda x} w)} = e^{-2x} \left(\sin(1 \cdot x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(1 \cdot x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- Die allgemeine homogene Lösung

$$c_1 e^{-2x} \left(\cos x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_2 e^{-2x} \left(\sin x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{-2x} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad y' = A\, y \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Eigenwerte:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 1$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

- Eigenvektoren: $A v = 3 v \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \iff \begin{cases} 2a - b = 3a \\ a + 4b = 3b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a - b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \boxed{a + b = 0} \iff \boxed{b = -a}$$

$a = 1$: $\quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$ nur einen bis Multiplikation mit einer Konstante.

$\Rightarrow$ Die Matrix A ist nicht diagonaliesierbar!

Bemerkung 6.1.10

$K=2$

$v_{\cancel{1}} = v_2$

$Bv = Bv_2 = v_1$

$Av = \lambda v \iff \underbrace{(A-\lambda E)}_{=B} v = 0$

- Was wir wollen ist ein zweite Vektor v_2 so dass

- Ist v ein Eigenvektor zur EW λ

$\Rightarrow Bv = 0$

$\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig und $B v_2 = v_1$. $\left(\Rightarrow B B v_2 = B v_1 \underset{\lambda=3}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \right)$

d.h $B^2 v_2 = 0$

aber $B v_2 = v_1 \neq 0$

- Fundamentalsystem

$e^{\lambda x} v_1 \quad , \quad e^{\lambda x} (x B v_2 + v_2)$

$e^{\lambda x} v_1 \quad\quad e^{\lambda x} (x v_1 + v_2)$

- Um v_2 zu bestimmen, lössen wir $B v_2 = v_1$

wobei $(A - \lambda E) v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 3$

$\Rightarrow \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$e^{3x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{3x}\left(x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

- homogene Lösung.

$$c_1 e^{3x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2 e^{3x}\begin{pmatrix}1+x\\-x\end{pmatrix}.$$

Die Lösung zur Aufgabe 3.

Ich habe sie in der VÜ nicht gemacht.

Aufgabe 3

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 - 6e^{-2x} \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + 2e^{-2x} \end{cases}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1. \end{aligned}}$$

AWP

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix}}_{=b(x)}$$

- Also: es handelt sich um ein inhomogenes DGS mit AWP.
- Man findet die Lösung dieses AWPs in 4 Schritte

Schritt 1 : Finde die allgemeine homogene Lösung zum $y' = Ay$ (wie im Aufgabe 1)

Schritt 2 : Finde eine partikuläre Lösung zum inhomogenen DGS $y' = Ay + b(x)$.

Schritt 3 : Die allgemeine Lösung zum inhomogenen DGS ist

$$f(x) = \underbrace{f_h(x)}_{\text{homogene Lösung vom Schritt 1}} + \underbrace{f_p(x)}_{\text{partikuläre Lösung vom Schritt 2.}}$$

Schritt 4 : Finde die Lösung zum AWP $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

Schritt 1 : Die allgemeine homogene Lösung von $y' = Ay$.

- Eigenwerte : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$.
- Eigenvektoren: $\lambda_1 = -2 \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\lambda_2 = -4 \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Fundamentalsystem (mit Satz 6.1.5)

  $$e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Allgemeine homogene Lösung.

$$f_h(x) = C_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-4x} \\ -e^{-4x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & e^{-4x} \end{pmatrix}}_{= W(x) \text{ Wronski-Matrix.}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen das für Schritt 2.

D.h. $f_h(x) = W(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\boxed{W'(x) = A \cdot W(x).}$ (Sie können die Probe machen.)

(*)

<u>Schritt 2</u> : Finde eine partikuläre Lösung.

- Wir haben die Wronski-Matrix $W(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$.

- Wir wollen eine partikuläre Lösung finden durch Variation der Konstanten.

$$f_p(x) = W(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = c_1(x)\, e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(x)\, e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten

Wir brauchen die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$,

so dass $f_p(x)$ eine Lösung von $y' = Ay + b$ ist.

- Wir haben

(1) $$f_p'(x) = W'(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}.$$

und

(2) $$f_p'(x) = A \cdot f_p(x) + b(x).$$

$$= \underbrace{A\, W(x)}_{= W'(x)} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + b(x).$$

mit (*)

Aus (1) und (2) $\Rightarrow$ $W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = b(x)$.

D.h.
$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1} \, b(x)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2x} & \frac{1}{2} e^{2x} \\ \frac{1}{2} e^{4x} & -\frac{1}{2} e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 e^{-2x} \\ 2 e^{-2x} \end{pmatrix}$$
$$= \dots = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 e^{2x} \end{pmatrix}.$$

- Die Inverse einer 2x2-Matrix
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- $$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow W(x)^{-1} = \frac{1}{-e^{-2x} \cdot e^{-4x} - e^{-2x} \cdot e^{-4x}} \begin{pmatrix} -e^{-4x} & -e^{-4x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2x} & \frac{1}{2} e^{2x} \\ \frac{1}{2} e^{4x} & -\frac{1}{2} e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(x) = -2$$
$$c_2'(x) = -4 e^{2x}$$

$\Rightarrow$ Bis die Wahl einer Konstante $\quad c_1(x) = -2x$

(ich nehme hier $c_1(0) = 0$, $c_2(0) = 0$) $\quad c_2(x) = -2 e^{2x} + 2.$

Es folgt: $$f_p(x) = W(x) \begin{pmatrix} -2x \\ -2e^{2x} + 2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -2x-2 \\ -2x+2 \end{pmatrix} e^{-2x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Schritt 3: Die allgemeine Lösung von $y' = Ay + b(x)$

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= c_1 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-4x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2x-2\\-2x+2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}e^{-4x}.$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Schritt 4: Finde c_1, c_2 so dass Lösung zum AWP $y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$.

$$f_1(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = c_1 + c_2$$

$$f_2(0) = c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = c_1 - c_2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1/2 \\ c_2 &= -1/2. \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}e^{-4x} + \begin{pmatrix}-2x-2\\-2x+2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}e^{-4x}$$

$$= \begin{pmatrix}-2x-3/2\\-2x+5/2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}3/2\\-3/2\end{pmatrix}e^{-4x}. \qquad \square$$

Die Lösung zur Aufgabe 4.

Ich hatte die in der Vü nicht beendet!

Aufgabe 4 (Fourier - Reihen).

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π - periodisch d.h. $f(x+2\pi) = f(x)$

$g(x+2\pi) = g(x)$.

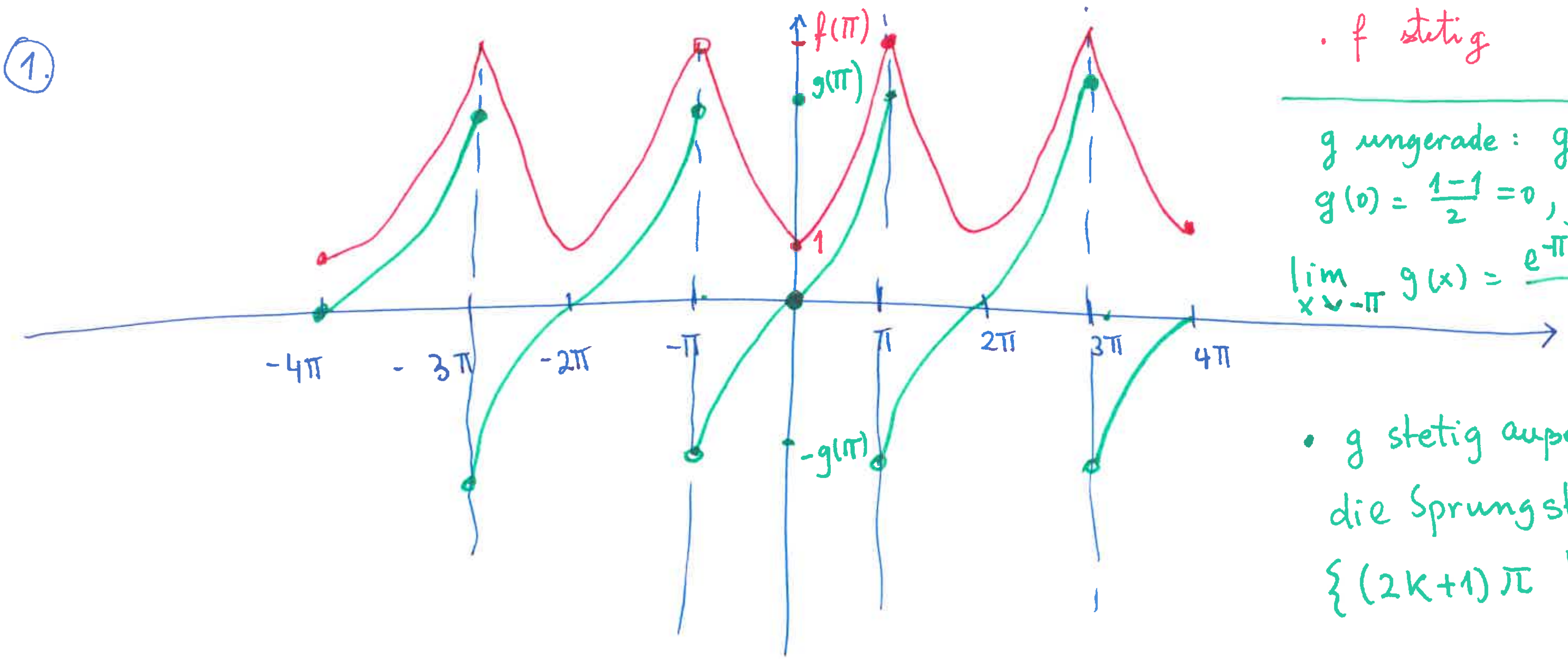
$f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad -\pi < x \leq \pi \longrightarrow$ f gerade : $f(-x) = f(x)$

$f(0) = \frac{1+1}{2} = 1$, $f(\pi) = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$

$g(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad -\pi < x \leq \pi$

$\lim\limits_{x \searrow -\pi} f(x) = \frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2} = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$

1.



• f stetig

---

g ungerade : $g(-x) = -g(x)$

$g(0) = \frac{1-1}{2} = 0$, $g(\pi) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}$

$\lim\limits_{x \searrow -\pi} g(x) = \frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2} = -\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}$

• g stetig außerhalb die Sprungstellen $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

② Die Fourier-Reihen von f und g.

Definition 7.3.1. Die Fourier-Reihe von f

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx)$$

wobei
$$a_j := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)\,dx \qquad j \geq 0$$

$$b_j := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)\,dx \qquad j \geq 1.$$

Für uns:

f

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\underbrace{\cos(jx)}_{\text{gerade}}\,dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{gerade}}\ \underbrace{\sin(jx)}_{\text{ungerade}}\,dx = 0$$

Satz 7.4.2

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'\cos(jx)\,dx$$

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b uv'\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cos(jx)\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x-e^{-x}}{2}\left(-j\sin(jx)\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}}_{= \sinh(\pi)} \underbrace{\cos(j\pi)}_{= (-1)^j} - \underbrace{\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}}_{= -\sinh(\pi)} \underbrace{\cos(-j\pi)}_{= (-1)^j} \right)$$

$$+ \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \sin(jx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^j \sinh(\pi) + \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)' \sin(jx)\, dx$$

$$= \frac{j}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cdot \sin(jx) \right]_{x=-\pi}^{\pi}}_{\sin(j\pi)=0 \;\Rightarrow\; =0} - j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cos(jx)\, dx \right)$$

$$= \frac{-j^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cos(jx)\, dx = a_j$$

$$a_j = \frac{2}{\pi}(-1)^j \sinh(\pi) - j^2 a_j \implies \boxed{a_j = \frac{(-1)^j}{\pi} \frac{2\sinh(\pi)}{1+j^2}}$$

Also: Für f wir haben $a_j = \frac{(-1)^j}{\pi} \frac{2\sinh(\pi)}{1+j^2}$

$b_j = 0.$

Fourier-Reihe für g: $\boxed{\text{Fourier}_g(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j\geq 1} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx).}$

Da g ungerade ist $\Longrightarrow$ (Satz 7.4.2) $a_j = 0$. für alle $j \geq 0$.

D.h. wir müssen nur b_j finden

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'} \sin(jx)\, dx$$

$\leftarrow$ Nochmal mit partieller Integration $\int_a^b u'v = [uv]_{x=a}^{b} - \int_a^b uv'$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2} \sin(jx)\right]_{x=-\pi}^{\pi}}_{=0 \text{ da } \sin(j\pi)=0.} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\, j\cos(jx)\, dx \right)$$

$$= -\frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'} \cos(jx)\, dx$$

$$= -\frac{j}{\pi} \left(\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos(jx) \right]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \left(-j \sin(jx)\right) dx \right)$$

$$= -\frac{j}{\pi} \left(\underbrace{\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}}_{=\sinh(\pi)} \underbrace{\cos(j\pi)}_{=(-1)^j} - \underbrace{\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}}_{=-\sinh(\pi)} \underbrace{\cos(-j\pi)}_{=\cos(j\pi) = (-1)^j} + j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin(jx)\, dx \right)$$

$$= -\frac{2j}{\pi} (-1)^j \sinh(\pi) - j^2 b_j$$

Also: wir haben

$$b_j = (-1)^{j+1} \frac{2j \sinh(\pi)}{\pi} - j^2 b_j \Longrightarrow \boxed{b_j = (-1)^{j+1} \frac{2j \sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)}}$$

und

$$\boxed{\mathrm{Fourier}_g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j \sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin(jx)}$$

③ Konvergenz der Fourier-Reihen. Wir benutzen Satz 7.3.3.

- f ist stetig $\Longrightarrow$ $\text{Fourier}_f(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- g ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
  - An der Punkten wo g stetig ist $\text{Fourier}_g(x) = g(x)$.
  - An der Sprungstellen $x_0 = (2k+1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Fourier}_g(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \nearrow x_0} g(x) + \lim_{x \searrow x_0} g(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g(\pi) - g(\pi)\right)$$

$$= 0.$$

---

④ Wir haben

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx)$$

$$\text{Fourier}_g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin(j\pi).$$

- Für die erste Reihe evaluieren wir $\text{Fourier}_f(x)$ an $x = 0$.

$$\text{Fourier}_f(x=0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \underbrace{\cos(0)}_{=1}.$$

von ③ $\rightarrow$ $\|$

$$f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Also
$$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{1+j^2}$$

das ist was wir wollen!

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{1+j^2} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(1 - \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\right).$$

$$= \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.$$

- Für die zweite Reihe evaluieren wir $\text{Fourier}_g(x)$ an $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(j\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & j = 2k \ \text{(d. h. gerade)}. \\ (-1)^k & j = (2k+1) \end{cases} \quad (*)$$

$x = \frac{\pi}{2}$ ist ein stetiger Punkt für $g \Rightarrow \text{Fourier}_g\left(x = \frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Von der Fourier-Reihe $\Rightarrow$

mit $(*)$

$$\text{Fourier}_g\left(x = \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin\left(j\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sum_{2k+1=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2k+1+1}}_{=1.} \frac{2(2k+1)\sinh(\pi)}{\pi\left(1+(2k+1)^2\right)} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2\,(2k+1)}{\pi\,\left(1+(2k+1)^2\right)} \sinh(\pi) .$$

$$= \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{1+(2k+1)^2}}_{= \frac{(-1)^0 (2\cdot 0+1)}{1+(2\cdot 0+1)^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{1+(2k+1)^2}}_{\text{Die ist die Reihe, dass wir brauchen}}}$$

$$\Rightarrow \quad \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{1+(2k+1)^2} \right).$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{1+(2k+1)^2} = \frac{\pi \sinh(\pi/2)}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2} .$$

⑤ Satz 7.4.7.

und

$f' = g$ außerhalb die Punkten $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
$g' = f$

$\rightarrow$ an dieser Punkten f stetig aber nicht differenzierbar

g nicht stetig und auch nicht differenzierbar.

~~[illegible]~~

Da f stetig ist $\xRightarrow{\text{Satz 7.4.7}}$ Wir können die Fourier-Reihe von f formal ableiten

$$\text{Fourier}_{f'}(x) = \left(\text{Fourier}_f(x)\right)'$$

$$= \left(\frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx)\right)'$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} (-j)\sin(jx)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin(jx)$$

$$= \text{Fourier}_g(x).$$

Da g nicht stetig ist, ist der Satz 7.4.7 nicht anwendbar.

$$\mathrm{Fourier}_{g'}(x) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{Fourier}_f(x) = \underbrace{\frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx)}_{=(**)}.$$

$g' = f$ außerhalb die Sprungstellen

Die formale Ableitung der Fourier-Reihe von g liefert

$$\left(\mathrm{Fourier}_g(x)\right)' = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin(jx)\right)'$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j^2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx) = (***)$$

Wir sehen, dass (**) und (***) verschieden sind!

Das ist die Konfirmation, dass Satz 7.4.7 in dem Fall von g nicht anwendbar ist.