Mittwoch

Degeratu Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Vortragsübung am Mi 18.01.23, Fr 20.01.23

Aufgabe 1 (homogenes DGS; A diagonalisierbar)
Sei A je eine der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

Aufgabe 2 (homogenes DGS; A nicht diagonalisierbar)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (inhomogenes DGS; Variation der Konstanten)
Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 - 6\mathrm{e}^{-2x} \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + 2\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung. Bestimmen Sie dann die Lösung des Anfangswertproblems: $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

Aufgabe 4 (Fourier Rechnung)
Seien die 2π-periodischen Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

für $-\pi < x \leqslant \pi$.

1. Skizzieren Sie f und g auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Entwicklen Sie f und g in ihre Fourier-Reihen.
3. In welchen Punkten konvergieren die Fourier–Reihen? Wogegen?
4. Werten Sie die Fourier–Reihen in geeigneten Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ aus und bestimmen Sie so explizit den Grenzwert der Reihen
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}.$$
5. Bestimmen Sie die Ableitungen f' und g' und ihre Fourier–Reihen.
   In welchem Fall gilt die Ableitungsregel aus Satz 7.4.7? In welchem nicht?

https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM3-Ing/

VII Blatt 6.

Systeme von Differentialgleichungen (DGS)

~~$y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t)$~~

$$\rightarrow \boxed{y'(x) = \underline{A(x)}\, y(x) + \underline{b(x)}}$$

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} = M(n\times n, \mathbb{R}).$$
$$x \longmapsto A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

$$b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\left\{ \begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)\, y_1(x) + \dots + a_{1n}(x)\, y_n(x) + b_1(x) \\ &\ \vdots \\ y_n'(x) &= \quad \dots . \end{aligned} \right.}$$

$$\boxed{y'(x) = A(x)\,y(x) + b(x)}$$

$b(x)=0$

$b(x)\neq 0$

homogene DGS.

$$\boxed{y'(x) = A(x)\,y(x)}$$

inhomogene DGS.

$$\boxed{y'(x) = A(x)\,y(x) + b(x)}$$

Lösung:
- Fundamentalsystem
- allgemeine homogene Lösung.

Lösung:
- $f_h(x)$ homogene Lösung
- $f_p(x)$ partikuläre Lösung
- allgemeine Lösung

$f(x) = f_h(x) + f_p(x)$.

$A = A(x)=\text{konst.}$

← in HM3

$A = A(x)$

homogene DGS mit konst. Koeff.

$$\boxed{y'(x) = A \cdot y(x)}$$

inhomogene DGS mit konst. Koeff.

$$\boxed{y'(x) = A\,y(x) + b(x)}$$

Aufgabe 3

Die Matrix A
(die Eigenwerte und Eigenvektoren)
liefern die Lösung.

A diagonaliesierbar

Aufgabe 1

A nicht diagonaliesierbar

Aufgabe 2

Aufgabe 1

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \text{diagonaliesierbar.}$$

Satz 6.1.5.

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2$ Eigenwerte

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
- $\mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \lambda_2$
- $\mathbb{C}$

und v_1, v_2 Eigenvektoren zu λ_1, λ_2

d.h. $A v_1 = \lambda_1 v_1$

$A v_2 = \lambda_2 v_2$

so dass $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig

d.h. $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ bilden eine Basis.

- Fundamentalsystem

$$e^{\lambda_1 x} v_1 \quad , \quad e^{\lambda_2 x} v_2$$

$\downarrow$

nicht diagonaliesierbar

- Existiert $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte und $v_1, \dots, v_m$ mit $m < n$ Eigenvektoren die linear unabhängig sind.
- Für 2×2-Matrizen das bedeutet $\lambda_1 = \lambda_2$ und existiert nur ein Eigenvektor.

$$\boxed{y' = A y}$$

Aufgabe 1

① $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

- Eigenwerten von A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - (-1)(-3).$$

$$= 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Nullstellen: $\dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 5}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5.$

Bemerkung: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$

- Eigenvektoren von A.

$\lambda_1 = 1$: $v_1 \in \mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\underline{A} v_1 = \lambda_1 v_1$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} 2a - 3b = a \\ -a + 4b = b \end{cases} \iff \begin{cases} a - 3b = 0 \\ -a + 3b = 0 \end{cases} \iff a - 3b = 0$$

$$\iff \quad a = 3b \qquad v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b \\ b \end{pmatrix} \quad \text{für eine } b \in \mathbb{R}$$

$$= b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $a = 1 \iff 3b = 1$

$b = 1/3$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 100 \\ 100/3 \end{pmatrix}$

Wir nehmen $b = 1$ und $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- $\lambda_2 = 5 \Rightarrow \ldots$ ein Eigenvektor ist $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Fundamentalsystem $\quad e^{\lambda_1 x} v_1 \, , \; e^{\lambda_2 x} v_2 \quad$ (Satz 6.1.5).

$$e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{5x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Die allgemeine homogene Lösung

$$f(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^x & -e^{5x} \\ e^x & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

② $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \in \mathbb{R}$
- Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Fundamentalsystem

$$e^{-1\cdot x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{-1\cdot x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Die allgemeine homogene Lösung

$$\underline{c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

③ $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

- Eigenwerte: $\lambda_1 = -2+i$, $\lambda_2 = -2-i$ complexe EW.
- Eigenvektoren: $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.
- Fundamentalsystem (Bemerkung 6.1.6).

$$e^{\lambda_1 x} w_1 , \quad e^{\lambda_2 x} w_2 \iff \underbrace{\boxed{e^{(-2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}}, \quad \underbrace{\boxed{e^{(-2-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}}.$$

Komplexe Lösungen.

$$\lambda := \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \underbrace{-2}_{=\alpha} + i \cdot \underbrace{1}_{=\beta}$$

$$Re(e^{\lambda_2 x} w_2) = Im(e^{\lambda_1 x} w_1)$$

$$W := w_1 = \overline{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v}.$$

reelle Lösungen

- $\boxed{Re(e^{\lambda x} w) = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) u - \sin(\beta x) v)} = e^{-2x} \left(\cos(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$
$$= e^{-2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$
- $\boxed{Im(e^{\lambda x} w) = e^{\alpha x} (\sin(\beta x) u + \cos(\beta x) v)} = e^{-2x} \left(\sin(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{-2x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$

• Die allgemeine homogene Lösung,

$$c_1 e^{-2x}\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} = e^{-2x}\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}.$$

• **Aufgabe 2:**

$$y' = A\,y \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ +1 & +4\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = \cancel{-y_1 - 4y_2} \quad y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

$\cancel{a + 4b = 3a}$

$\begin{cases} \cancel{-2a + 4b = 0} \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b$ $\quad a = 2b$

$\cancel{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$

• Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

• Eigenvektoren: $\begin{pmatrix}2 & -1\\ +1 & +4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}. \iff \begin{cases} 2a - b = 3a \\ \cancel{-a - 4b = 3b} \\ a + 4b = 3b \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -a - b = 0 \\ a + b = 0 \\ \cancel{-4a - 4b = 0} \end{cases} \iff a + b = 0 \qquad b = -a$$

$v = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ ist der einzige Eigenvektor.

Bis eine Konstante

$\Longrightarrow$ die Matrix A ist nicht diagonalisierbar.

- $B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ +1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ +1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man findet einen zweite ~~A~~ Vektor v_2 so dass $B v_2 \neq 0$.

$B v_2 = v_1.$ (v_2 ein Hauptvektor)

$\Rightarrow (B^2 v_2 = 0)$ da $B v_1 = (A - \lambda E) v_1 = A v_1 - \lambda v_1$

$K=2$

wobei $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{array}{l} K=2 \\ v = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ \lambda = 3 \end{array} \right.$

- Fundamentalsystem (Bemerkung 6.1.10).

$$e^{\lambda x} v_1 \quad , \quad e^{\lambda x} (v_1 + x v_2).$$

- Homogene Lösung

$$c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -1+x \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Probe!

Aufgabe 4 : $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch d.h $f(x+2\pi) = f(x)$

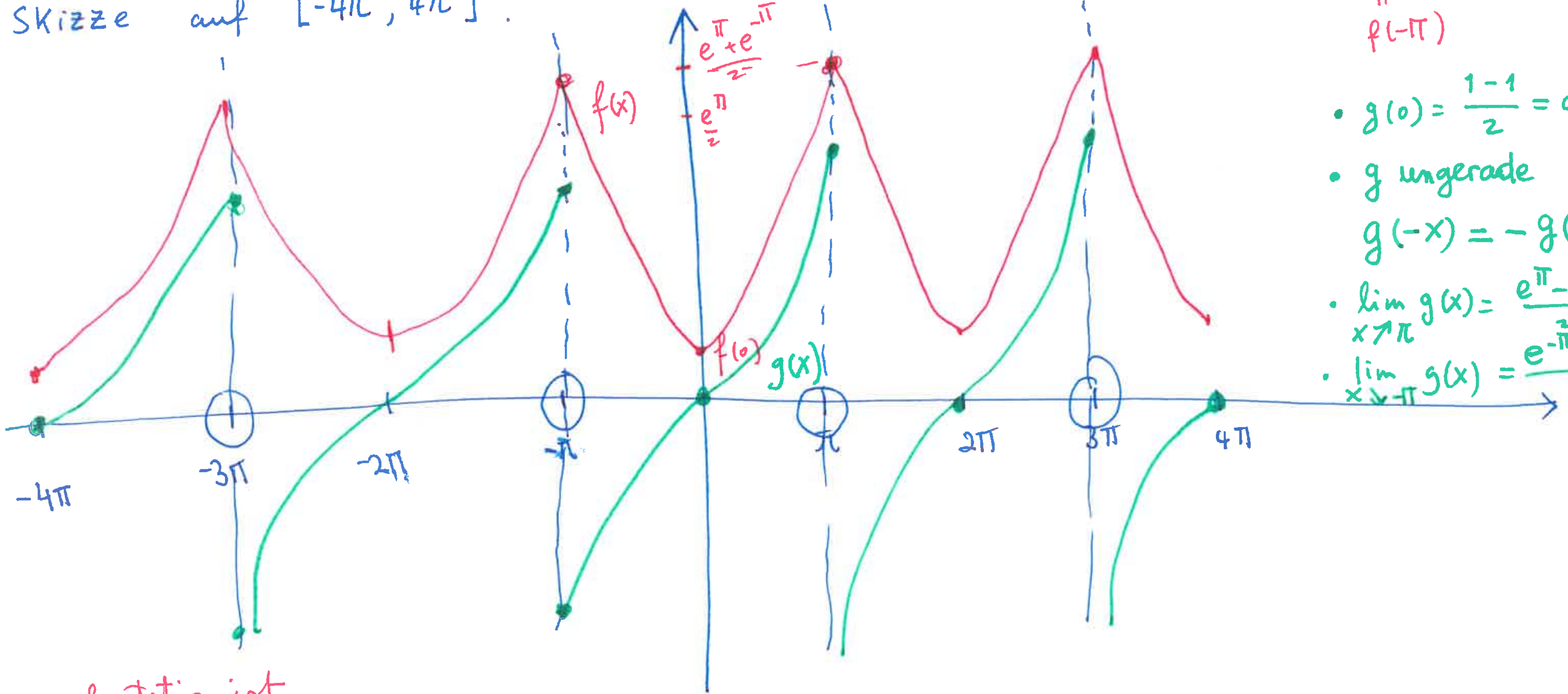
$g(x+2\pi) = g(x)$.

für $-\pi < x < \pi$ $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\to$ • $f(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1$

• f gerade $f(-x) = f(x)$

$g(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. • $f(\pi) = \dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = f(-\pi)$

1. Skizze auf $[-4\pi, 4\pi]$.



• $g(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0$

• g ungerade $g(-x) = -g(x)$

• $\lim\limits_{x \nearrow \pi} g(x) = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$

• $\lim\limits_{x \searrow -\pi} g(x) = \dfrac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2}$

• f stetig ist

• g stetig außerhalb $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, wo sie Sprungstelle hat.

2. Die Fourier-Reihen von f und g.

Definition 7.3.1. f 2π-periodisch

die Fourier-Reihe von f

$$\mathrm{Fourier}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx)$$

wobei $a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx)\, dx \quad \forall\, j \geq 0$

$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx)\, dx \quad \forall\, j \geq 1$

Satz 7.4.2. : f gerade $\Longrightarrow$ $b_j = 0$

cos gerade
sin ungerade

f ungerade $\Longrightarrow$ $a_j = 0$.

Für unsere f

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx)\, dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \cos(jx)\, dx$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \quad \dots \quad = (-1)^j \, \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi (1 + j^2)} .$$

Die Lösung zur Aufgabe 3.

Ich habe sie in der VÜ nicht gemacht.

Aufgabe 3

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 - 6e^{-2x} \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + 2e^{-2x} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\boxed{\begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1. \end{matrix}}}_{\text{AWP}}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix}}_{=b(x)}$$

- Also: es handelt sich um ein inhomogenes DGS mit AWP.
- Man findet die Lösung dieses AWPs in 4 Schritte

Schritt 1: Finde die allgemeine homogene Lösung zum $y' = Ay$ (wie in Aufgabe 1)

Schritt 2: Finde eine partikuläre Lösung zum inhomogenen DGS $y' = Ay + b(x)$.

Schritt 3: Die allgemeine Lösung zum inhomogenen DGS ist

$$f(x) = \underbrace{f_h(x)}_{\text{homogene Lösung vom Schritt 1}} + \underbrace{f_p(x)}_{\text{partikuläre Lösung vom Schritt 2.}}$$

Schritt 4: Finde die Lösung zum AWP $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

Schritt 1 : Die allgemeine homogene Lösung von $y' = Ay$.

- Eigenwerte : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$.
- Eigenvektoren : $\lambda_1 = -2 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\lambda_2 = -4 \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Fundamentalsystem (mit Satz 6.1.5)

$$e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Allgemeine homogene Lösung.

$$f_h(x) = C_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-4x} \\ -e^{-4x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & e^{-4x} \end{pmatrix}}_{= W(x) \text{ Wronski-Matrix.}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen das für Schritt 2.

D.h. $f_h(x) = W(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\boxed{W'(x) = A \cdot W(x).}$ (Sie können die Probe machen.)

(*)

Schritt 2 : Finde eine partikuläre Lösung.

- Wir haben die Wronski-Matrix $W(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$.

- Wir wollen eine partikuläre Lösung finden durch Variation der Konstanten.

$$f_p(x) = W(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \underbrace{c_1(x)}_{\text{Variation der Konstanten}} e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(x) e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$,

so dass $f_p(x)$ eine Lösung von $y' = Ay + b$ ist.

- Wir haben

(1) $$f_p'(x) = W'(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}.$$

und

(2) $$f_p'(x) = A \cdot f_p(x) + b(x).$$

$$= \underbrace{A\ W(x)}_{= W'(x)} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + b(x).$$

mit ⊛

Aus (1) und (2) $\Rightarrow W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = b(x).$

D.h. $\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1}\, b(x)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2x} & \frac{1}{2} e^{2x} \\ \frac{1}{2} e^{4x} & -\frac{1}{2} e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 e^{-2x} \\ 2 e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 e^{2x} \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \quad c_1'(x) = -2$

$\quad\;\; c_2'(x) = -4 e^{2x}$

$\Rightarrow$ Bis die Wahl einer Konstante $\quad c_1(x) = -2x$

(ich nehme hier $c_1(0) = 0$, $c_2(0) = 0$) $\quad c_2(x) = -2 e^{2x} + 2$.

Es folgt: $\quad f_p(x) = W(x) \begin{pmatrix} -2x \\ -2e^{2x} + 2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -2x-2 \\ -2x+2 \end{pmatrix} e^{-2x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4x}.$

- Die Inverse einer 2x2-Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- $W(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow W(x)^{-1} = \frac{1}{-e^{-2x} \cdot e^{-4x} - e^{-2x} \cdot e^{-4x}} \begin{pmatrix} -e^{-4x} & -e^{-4x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2x} & \frac{1}{2} e^{2x} \\ \frac{1}{2} e^{4x} & -\frac{1}{2} e^{4x} \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Die allgemeine Lösung von $y' = Ay + b(x)$

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= c_1 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-4x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2x-2\\-2x+2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}e^{-4x}.$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Schritt 4: Finde c_1, c_2 so dass Lösung zum AWP $y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$.

$$f_1(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = c_1 + c_2$$

$$f_2(0) = c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = c_1 - c_2.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} c_1 = 1/2 \\ c_2 = -1/2. \end{matrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}e^{-4x} + \begin{pmatrix}-2x-2\\-2x+2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}e^{-4x}$$

$$= \begin{pmatrix}-2x-3/2\\-2x+5/2\end{pmatrix}e^{-2x} + \begin{pmatrix}3/2\\-3/2\end{pmatrix}e^{-4x}. \qquad \square$$

Die Lösung zur Aufgabe 4.

Ich hatte die in der Vü nicht beendet!

Aufgabe 4 (Fourier - Reihen).

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad 2\pi$ - periodisch $\quad$ d.h. $f(x+2\pi) = f(x)$

$g(x+2\pi) = g(x)$.

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad -\pi < x \leq \pi \longrightarrow$$

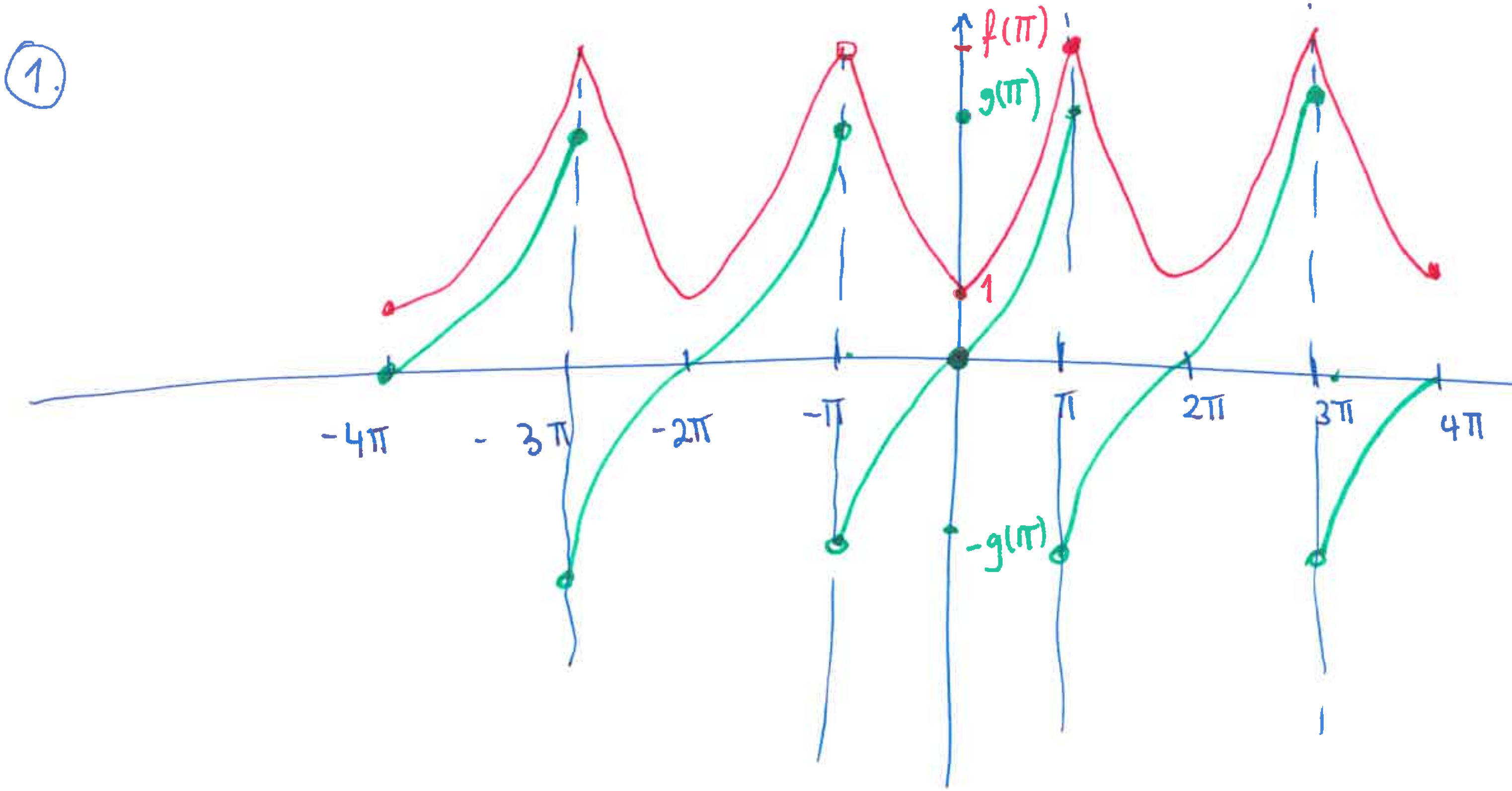
f gerade : $f(-x) = f(x)$

$f(0) = \frac{1+1}{2} = 1, \quad f(\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$

$\lim\limits_{x \searrow -\pi} f(x) = \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$

$$g(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad -\pi < x \leq \pi$$

1.



- f stetig

---

g ungerade : $g(-x) = -g(x)$

$g(0) = \frac{1-1}{2} = 0, \quad g(\pi) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$

$\lim\limits_{x \searrow -\pi} g(x) = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2} = -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$

- g stetig außerhalb die Sprungstellen $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

② Die Fourier-Reihen von f und g.

Definition 7.3.1. Die Fourier-Reihe von f

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx)$$

wobei

$$a_j := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)\,dx \qquad j \geq 0$$

$$b_j := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)\,dx \qquad j \geq 1.$$

Für uns:

f

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\underbrace{\cos(jx)}_{\text{gerade}}\,dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{gerade}}\underbrace{\sin(jx)}_{\text{ungerade}}\,dx = 0$$

Satz 7.4.2

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'\cos(jx)\,dx$$

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b uv'\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cos(jx)\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x-e^{-x}}{2}\left(-j\sin(jx)\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}}_{=\sinh(\pi)} \underbrace{\cos(j\pi)}_{=(-1)^j} - \underbrace{\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}}_{=-\sinh(\pi)} \underbrace{\cos(-j\pi)}_{=(-1)^j} \right)$$

$$+ \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \sin(jx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^j \sinh(\pi) + \underbrace{\frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \right)' \sin(jx)\, dx}$$

$$= \frac{j}{\pi}\left(\underbrace{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cdot \sin(jx) \Big|_{x=-\pi}^{\pi}}_{=0} - j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cos(jx)\, dx \right)$$

$\sin(j\pi) = 0$

$$= \frac{-j^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cos(jx)\, dx \quad = a_j$$

$$a_j = \frac{2}{\pi}(-1)^j \sinh(\pi) - j^2 a_j \implies \boxed{a_j = \frac{(-1)^j}{\pi} \frac{2\sinh(\pi)}{1+j^2}}$$

<u>Also</u>: Für f wir haben $\quad a_j = \frac{(-1)^j}{\pi} \frac{2\sinh(\pi)}{1+j^2}$

$b_j = 0.$

Fourier-Reihe für g:

$$\boxed{\text{Fourier}_g(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j\geq 1} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx).}$$

Da g ungerade ist $\Longrightarrow$ (Satz 7.4.2) $\quad a_j = 0.$ für alle $j \geq 0$.

D.h. wir müssen nur b_j finden

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'} \sin(jx)\, dx$$

$\longleftarrow$ Nochmal mit partieller Integration $\int_a^b u'v = [uv]_{x=a}^b - \int_a^b uv'$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sin(jx)\right]_{x=-\pi}^{\pi}}_{=0 \text{ da } \sin(j\pi)=0.} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\, j\cos(jx)\, dx \right)$$

$$= -\frac{j}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}_{=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'} \cos(jx)\,dx$$

$$= -\frac{j}{\pi}\left(\left[\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cos(jx)\right]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\left(-j\sin(jx)\right)dx\right)$$

$$= -\frac{j}{\pi}\left(\underbrace{\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}}_{=\sinh(\pi)}\underbrace{\cos(j\pi)}_{=(-1)^j} - \underbrace{\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}}_{=-\sinh(\pi)}\underbrace{\cos(-j\pi)}_{=\cos(j\pi)=(-1)^j} + j\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\sin(jx)\,dx\right)$$

$$= -\frac{2j}{\pi}(-1)^j\sinh(\pi) - j^2 b_j$$

Also: wir haben

$$b_j = (-1)^{j+1}\frac{2j\sinh(\pi)}{\pi} - j^2 b_j \Longrightarrow \boxed{b_j = (-1)^{j+1}\frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)}}$$

und

$$\boxed{\mathrm{Fourier}_g(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)}\sin(jx)}$$

③ Konvergenz der Fourier-Reihen. Wir benutzen Satz 7.3.3.

- f ist stetig $\Longrightarrow$ $\text{Fourier}_f(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- g ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
  - An der Punkten wo g stetig ist $\text{Fourier}_g(x) = g(x)$.
  - An der Sprungstellen $x_0 = (2k+1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Fourier}_g(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \nearrow x_0} g(x) + \lim_{x \searrow x_0} g(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g(\pi)\ \text{[illegible]}\ g(\pi)\right)$$

$$= 0.$$

④ Wir haben

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx)$$

$$\text{Fourier}_g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin(j\pi).$$

- Für die erste Reihe evaluieren wir $\text{Fourier}_f(x)$ an $x=0$.

$$\text{Fourier}_f(x=0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \underbrace{\cos(0)}_{=1}.$$

von ③ $\longrightarrow$ $\parallel$

$$f(0) = \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Also $$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{1+j^2}}$$

das ist was wir wollen!

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{1+j^2} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(1 - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \right).$$

$$= \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.$$

- Für die zweite Reihe evaluieren wir $\text{Fourier}_g(x)$ an $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & j = 2k \quad (\text{d.h. gerade}). \\ (-1)^k & j = (2k+1) \end{cases} \qquad (*)$$

$x = \frac{\pi}{2}$ ist ein stetiger Punkt für $g \Rightarrow \text{Fourier}_g\left(x = \frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$

Von der Fourier-Reihe $\Rightarrow$

mit $(*)$

$$\text{Fourier}_g\left(x = \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j \sinh(\pi)}{\pi\,(1+j^2)} \sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) =$$

5 Satz 7.4.7.

und

$f' = g$ außerhalb die Punkten $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
$g' = f$

$\rightarrow$ an dieser Punkten f stetig aber nicht differenzierbar

g nicht stetig und auch nicht differenzierbar.

Da f stetig ist $\xRightarrow{\text{Satz 7.4.7}}$ Wir können die Fourier-Reihe von f formal ableiten

$$\text{Fourier}_{f'}(x) = \left(\text{Fourier}_f(x)\right)'$$

$$= \left(\frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx)\right)'$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} (-j)\sin(jx)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin(jx)$$

$$= \text{Fourier}_g(x).$$

Da g nicht stetig ist, ist der Satz 7.4.7 nicht anwendbar.

$$\mathrm{Fourier}_{g'}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ g' = f \text{ außerhalb} \\ \text{die Sprungstellen}}}{=} \mathrm{Fourier}_f(x) = \underbrace{\frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx)}_{= (**)}.$$

Die formale Ableitung der Fourier-Reihe von g liefert

$$\left(\mathrm{Fourier}_g(x)\right)' = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j\sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \sin(jx)\right)'$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j^2 \sinh(\pi)}{\pi(1+j^2)} \cos(jx) = (***)$$

Wir sehen, dass (**) und (***) verschieden sind!

Das ist die Konfirmation, dass Satz 7.4.7 in dem Fall von g nicht anwendbar ist.