am Freitag, 3. Feb.

Degeratu   Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 7

Vortragsübung am Mi 01.02.23, Fr 03.02.23

Aufgabe 1 (Fourier-Reihen; beliebige Periode)
Sei $L > 0$. Es sei $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x(L-x) \qquad \text{für } 0 < x < L.$$

(1) Setzen Sie die Funktion f ungerade und $2L$-periodisch fort. Berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Fortsetzung.

(2) Setzen Sie die Funktion f gerade und $2L$-periodisch fort. Berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Fortsetzung.

Aufgabe 2 (PDE: Die Wärmeleitungsgleichung)
Sei $L = 80$ und $a = 1{,}15$. Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 && \text{Randbedingungen für } t \geqslant 0 \\ u(x,0) &= f(x) && \text{Anfangswerte für } 0 < x < L \end{aligned}$$

mit

$$(1)\ f(x) = 100\sin\left(\frac{\pi x}{80}\right), \quad (2)\ f(x) = 100\sin\left(\frac{3\pi x}{80}\right), \quad (3)\ f(x) = x(L-x) \text{ für } 0 < x < L.$$

Konkretes Problem aus der Praxis: Bestimmen Sie die Temperatur $u(x,t)$ in einem seitlich isolierten Kupferstab von 80 cm Länge, wenn die Anfangstemperatur $100\sin(\pi x/80)$°C beträgt und die Enden auf 0°C gehalten werden. Wie lange dauert es, bis die Höchsttemperatur in der Stange auf 50°C sinkt?
Physikalische Daten für Kupfer: Dichte $\rho = 8{,}92$ g/cm^3, spezifische Wärme $\sigma = 0{,}092$ cal/(g K), Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}95$ cal/(cm s K). Die Temperaturleitfähigkeit des Kupfers ist dann $a^2 = \lambda/(\sigma\rho) = 1{,}158$ cm^2/s.

Aufgabe 1

$L > 0$

$f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x(L-x) \qquad 0 < x < L.$

(1) Die ungerade 2L-periodische Fortsetzung $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von f.

Fortsetzungen

① L-periodisch

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j \geq 1} a_j \cos(j\omega x) + \sum_{j \geq 1} b_j \sin(j\omega x)$$

② ungerade 2L-periodisch

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega x)$$

$\boxed{a_j = 0}$

③ gerade 2L-periodisch

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega x)$$

$\boxed{b_j = 0}$

Kapitel 7

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-periodisch

$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j \geq 1}^{\infty} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx)$$

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(jx)\, dx$$

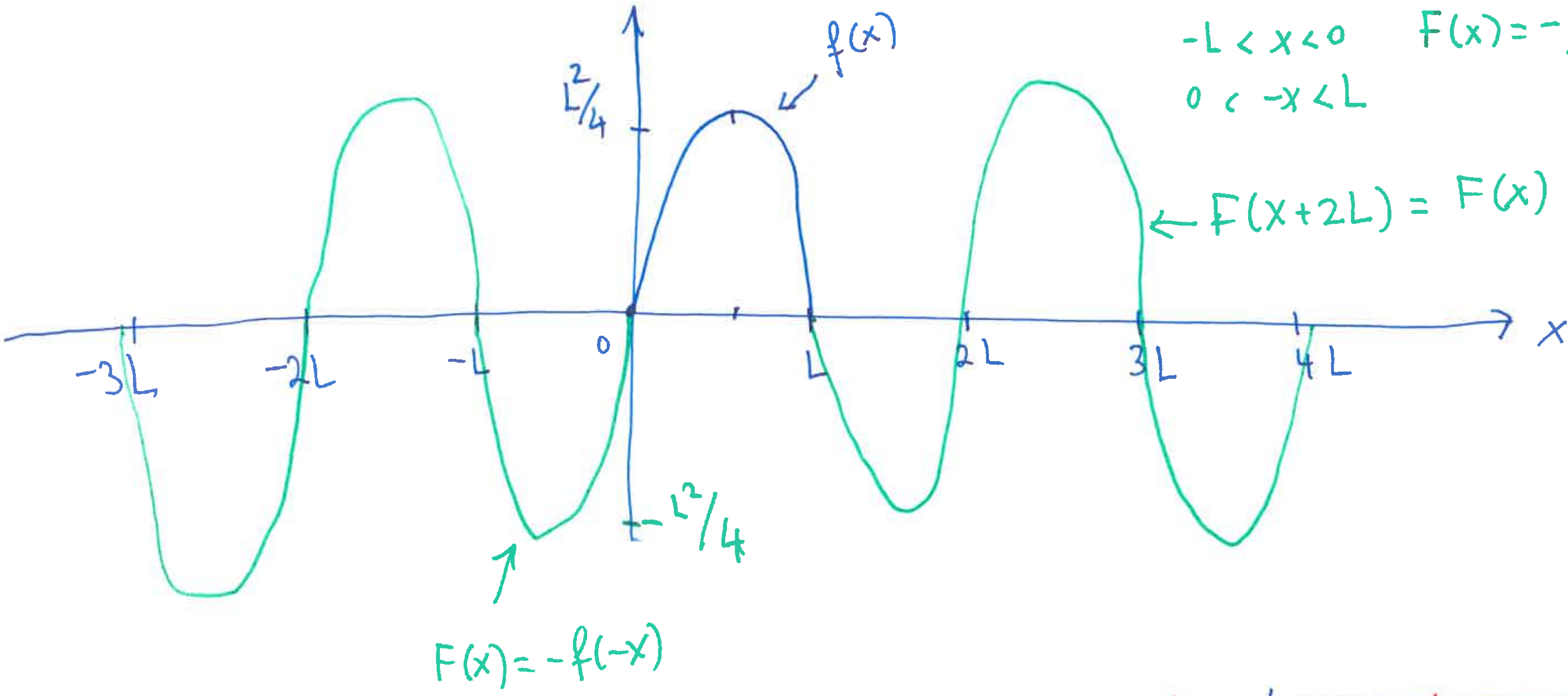
$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(jx)\, dx$$

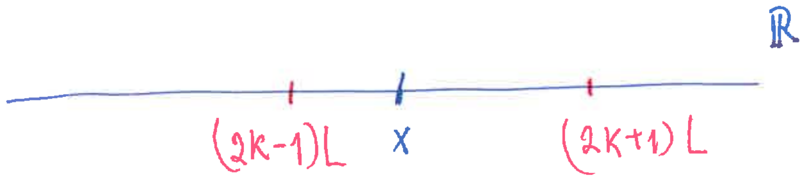
- F Fortsetzung von $f \implies F(x) = f(x)$ für alle $x \in [0, L]$.
- F ungerade $\Rightarrow \boxed{F(-x) = -F(x)}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- F $2L$-periodisch $\Rightarrow F(x+2L) = F(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow F(x + 2kL) = F(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

$-L < x < 0$ $\quad F(x) = -f(-x)$

$0 < -x < L$





- $$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x \leq L \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & -L \leq x < 0 \end{cases} \rightarrow F \text{ auf } [-L, L]$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ $\exists!\ k \in \mathbb{Z}$ so dass $2kL - L \leq x \leq 2kL + L$

$$-L \leq x - 2kL \leq L$$

- $F(x) := F(x - 2kL)$

allgemeine 2L-periodische

- Die Fourier-Reihe von F.

2L-periodisch

$2L = 2\pi$

$\omega = \frac{\pi}{L} = 1$

Fourier Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega x)$

mit $a_j = \frac{2}{L} \int_0^L \underset{F(x)}{\underset{\parallel}{f(x)}} \cos(j\omega x)\,dx$; $b_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(j\omega x)\,dx$.

F ungerade $\Rightarrow a_j = 0$; F gerade $\Rightarrow b_j = 0$

2π-periodisch

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(jx)\,dx$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(jx)\,dx$$

$$= -L\,\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega} + \frac{1}{j\omega}\left(\frac{\sin(j\omega L)}{j\omega} - \frac{\sin(j\omega 0)}{j\omega}\right).$$

$$\omega = \frac{\pi}{L} \nearrow \quad = -L^2\,\underbrace{\frac{\cos(j\pi)}{j\pi}}_{(-1)^j} + \frac{1}{j\pi}\left(\underbrace{\frac{\sin(j\pi)}{j\pi}}_{0} - 0\right).$$

$\forall\, j \in \mathbb{Z}$

d.h. auch $j \geq 1$.

$$\boxed{\int_0^L x \sin(j\omega x)\,dx = \frac{L^2}{j\pi}(-1)^{j+1}}$$

$$* \int_0^L x^2 \sin(j\omega x)\,dx = \int_0^L x^2 \left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)' dx$$

$$= x^2\left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)\Bigg|_{x=0}^{L} - \int_0^L \underbrace{(x^2)'}_{=2x}\left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right) dx$$

$$= \left(L^2\left(-\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega}\right) - 0\right) + \frac{2}{j\omega}\underline{\int_0^L x \cos(j\omega x)\,dx}$$

$$f(x) = x\,(L-x)$$

$$\boxed{\omega = \frac{\pi}{L}}$$

- F ungerade $\Rightarrow a_j = 0$

$$b_j = \frac{2}{L}\int_0^L \underbrace{x\,(L-x)}_{= Lx - x^2} \cdot \sin(j\omega x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\cancel{L}}\cancel{L}\int_0^L x\,\sin(j\omega x)\,dx - \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin(j\omega x)\,dx$$

$$* \int_0^L x\,\sin(j\omega x)\,dx = \int_0^L x\left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)' dx$$

$$= x\left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)\Bigg|_{x=0}^{L} - \int_0^L \underbrace{x'}_{=1} \cdot \left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right) dx$$

$$= \left(-L\,\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega} - 0\right) + \frac{1}{j\omega}\int_0^L \underbrace{\cos(j\omega x)}_{= \left(\frac{\sin(j\omega x)}{j\omega}\right)'}\,dx$$

$$b_j = 2\int_0^L x \sin(j\omega x)\,dx - \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin(j\omega x)\,dx$$

$$= \underbrace{2\frac{L^2}{j\pi}(-1)^{j+1} - \frac{2}{\cancel{L}}\left(-\frac{\overset{L^2}{\cancel{L^3}}}{j\pi}(-1)^j\right.}_{=0} \left. + \frac{2L^3}{j^3\pi^3}\left((-1)^j-1\right)\right)$$

$$= -\frac{4L^2}{j^3\pi^3}\left((-1)^j - 1\right)$$

$$(-1)^j = \begin{cases} 1 & j = \text{gerade} \\ -1 & j = \text{ungerade} \end{cases}$$

$$\boxed{b_j = \begin{cases} 0 & j \ \cancel{\text{un}}\text{gerade} \\ \dfrac{8L^2}{j^3\pi^3} & j \ {}^{\text{un}}\text{gerade} \end{cases}}$$

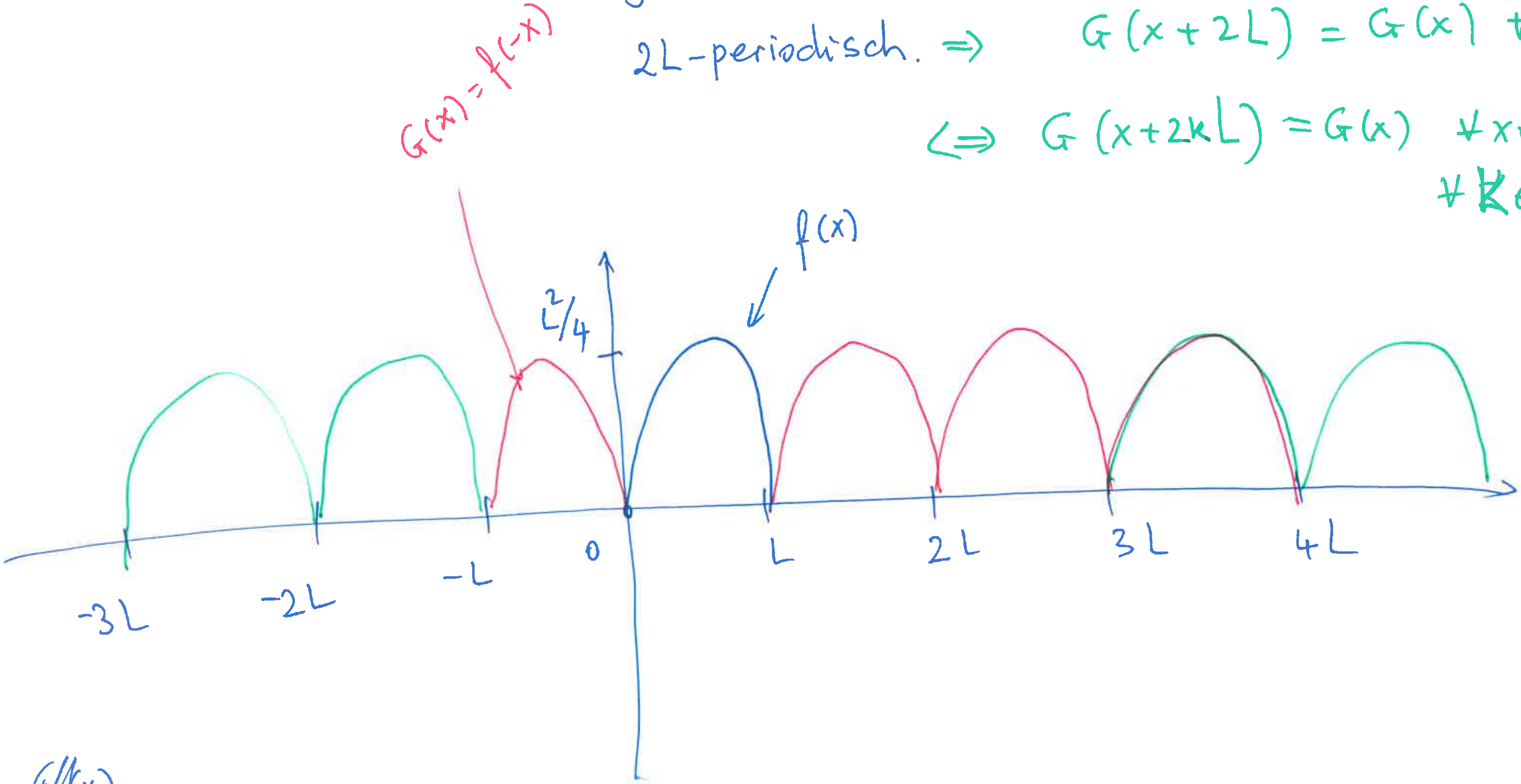
(2). $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = x(L-x)$.

$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Fortsetzung von f : $\quad G(x) = f(x) \quad 0 \le x \le L$

gerade $\Longrightarrow \quad G(-x) = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2L-periodisch. $\Longrightarrow \quad G(x+2L) = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

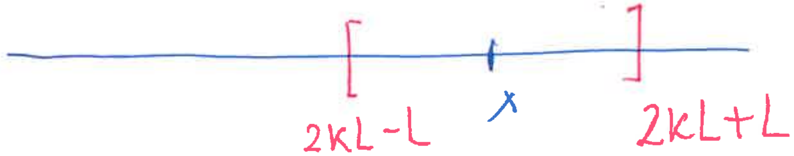
$\Longleftrightarrow \quad G(x+2kL) = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\forall k \in \mathbb{Z}$.



$\cancel{G}(x)$

7.7.4 Vorlesung

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le L \\ 0 & x = 0 \\ f(-x) & -L \le x \le 0 \end{cases}$$



Für alle $x \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $k \in \mathbb{Z}$ so dass $2kL - L \le x \le 2kL + L$

$$-L < x - 2kL < L$$

$$G(x) = G(x - 2kL)$$

• Fourier-Reihe von G

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega x).$$

G gerade $\Longrightarrow$ $b_j = 0$

$$\boxed{\omega = \frac{\pi}{L}}$$

$$a_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(j\omega x)\,dx \quad \forall j \ge 0$$

$$a_j = \frac{2}{L}\int_0^L x\,(L-x)\cos(j\omega x)\,dx = \frac{2}{L}L\int_0^L x\,\underbrace{\cos(j\omega x)}_{=\left(+\frac{\sin(j\omega x)}{j\omega}\right)'}\,dx - \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos(j\omega x)\,dx.$$

für $j \ge 1$

Gilt nicht für $j = 0$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x\,(L-x)\,dx$$

$\Rightarrow$ ... Rechnung.

$$\left\{\begin{aligned} a_j &= \frac{2L^2}{j^2\pi^2}\left((-1)^j - 1\right) - \frac{4L}{j\pi}(-1)^j \qquad (??) \\[2ex] a_0 &= \frac{L^2}{3} \end{aligned}\right.$$

Aufgabe 2

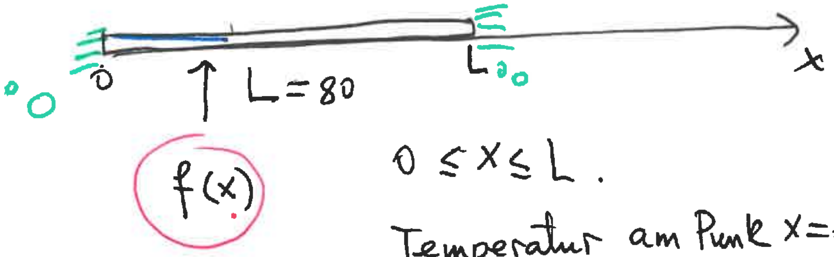
Ansatz : $u(x,t) = v(x) \cdot S(t)$

Gesucht ist eine Funktion

$$u : [0,L] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underset{\text{Ort}}{x} \in [0,L], \quad \underset{\text{Zeit}}{t} \in [0,+\infty) \longmapsto u(x,t)$$

Temperatur an Zeit t im Punkt x



$0 \le x \le L$.

Temperatur am Punk $x=0$ & Zeit $t=0$.

Evolution des Temperatur

- $u_t(x,t) = a^2\, u_{xx}(x,t)$ — Konstante abhängig von Materiale
- $u(x=0,t) = 0$, $u(x=L,t) = 0$ → Randbedingungen.
- $u(x,t=0) = f(x)$ ← Anfangsbedingung

Gegeben $f(x)$ finde $u(x,t)$!

(1) $f(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

(2) $f(x) = 100 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$

(3) $f(x) = x(L-x)$.

Fourier - ~~Entwickl~~ Reihe von f

$u(x,t) \; \cancel{\text{za}} \quad = ?$

$\cancel{\partial_t u = a^2 u_{xx}}$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \underline{\underline{a}}^2\, u_{xx}(x,t) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \leftarrow \text{Randbeding. } t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & \leftarrow \forall\ 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Satz 8.2.6

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{u_n(x,t)}_{}$$

$$= v_n(x)\, s_n(t)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-\underline{\underline{a}}^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right).$$

$\frac{n\pi}{L} = \lambda_n$, $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \lambda_n^2$

$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}.$

$f(x) \; \cancel{\text{an}} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\cancel{n}\,\omega x)$

$\uparrow$ ungerade 2L-periodisch Fortsetzung

$$= \sum_n b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$\frac{\pi}{L}$

(1) $f(x) = 100 \sin\left(\frac{1 \cdot \pi x}{L}\right)$. ← 2L-periodisch ungerade

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

$\Rightarrow$ $b_1 = 100$, und $b_n = 0$ für alle $n \geq 2$.

$$u(x,t) = b_1 \sin\left(\frac{1\pi}{L} x\right) e^{-a^2 \left(\frac{1\pi}{L}\right)^2 t} = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-a^2 \frac{\pi^2}{L^2} t}.$$

(2) $f(x) = 100 \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right)$. ←

$n = 3$

$b_3 = 100$ und $b_n = 0$ für alle $n \neq 3$.

$$u(x,t) = b_3 \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right) e^{-a^2 \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t} = 100 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) e^{-a^2 \frac{9\pi^2}{L^2} t}$$

(3) $f(x) = x(L-x)$ $\quad f(x) \sim \sum_{n \text{ ungerade}} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$. $\quad$ b_n ← Aufgabe!

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-a^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right).$$