am Mittwoch 1. Feb.

Degeratu Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 7

Vortragsübung am Mi 01.02.23, Fr 03.02.23

Aufgabe 1 (Fourier-Reihen; beliebige Periode)
Sei $L > 0$. Es sei $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x(L - x) \qquad \text{für } 0 < x \leq L.$$

(1) Setzen Sie die Funktion f ungerade und $2L$-periodisch fort. Berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Fortsetzung.

(2) Setzen Sie die Funktion f gerade und $2L$-periodisch fort. Berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Fortsetzung.

Aufgabe 2 (PDE: Die Wärmeleitungsgleichung)
Sei $L = 80$ und $a = 1{,}15$. Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L\\
&u(0,t) = u(L,t) = 0 && \text{Randbedingungen für } t \geqslant 0\\
&u(x,0) = f(x) && \text{Anfangswerte für } 0 < x < L
\end{aligned}$$

mit

(1) $f(x) = 100\sin(\frac{\pi x}{80})$, (2) $f(x) = 100\sin(\frac{3\pi x}{80})$, (3) $f(x) = x(L-x)$ für $0 < x < L$.

Konkretes Problem aus der Praxis: Bestimmen Sie die Temperatur $u(x,t)$ in einem seitlich isolierten Kupferstab von 80 cm Länge, wenn die Anfangstemperatur $100\sin(\pi x/80)$°C beträgt und die Enden auf 0°C gehalten werden. Wie lange dauert es, bis die Höchsttemperatur in der Stange auf 50°C sinkt?
Physikalische Daten für Kupfer: Dichte $\rho = 8{,}92$ g/cm^3, spezifische Wärme $\sigma = 0{,}092$ cal/(g K), Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}95$ cal/(cm s K). Die Temperaturleitfähigkeit des Kupfers ist dann $a^2 = \lambda/(\sigma\rho) = 1{,}158$ cm^2/s.

Aufgabe 1 : $L > 0$

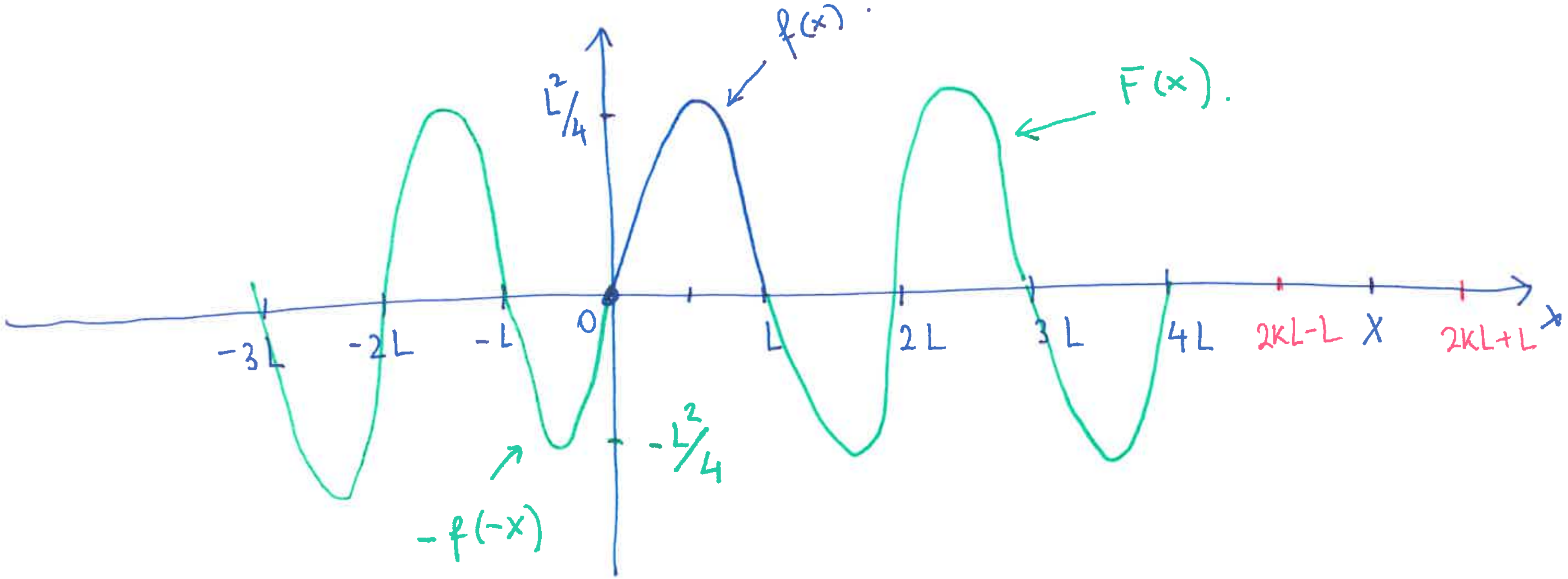
$f : (0, L] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x(L-x).$

(1). $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ · Fortsetzung von f d.h. $0 < x < L \quad F(x) = f(x).$

· F ungerade $\qquad F(-x) = -F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

· $2L$-periodisch $\qquad F(x+2L) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \qquad F(x+2kL) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
alle $k \in \mathbb{Z}$.



$$F(x) := \begin{cases} f(x) & 0 < x \leq L \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

$\cancel{F(x)}$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $k \in \mathbb{Z}$

$-L \leq x \leq L$

$2kL - L \leq x \leq 2kL + L$

$$F(x) := F(\underbrace{x - 2kL}_{\in [-L, L]})$$

Fourier-Reihe von F ?

Allgemein: $2L$-periodische Funktion F

$\omega = \frac{\pi}{L}$ $= 1$ $2L = 2\pi$

Fourier-Reihe von F

$$\mathrm{Fourier}_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega x) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \sin(j\omega x).$$

$$a_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(j\omega x)\, dx \quad \forall j \geq 0, \quad b_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(j\omega x)\, dx$$

F ungerade $\Longrightarrow$ $\cancel{\ }$ $a_j = 0 \quad \forall\, j \geq 0$ d.h. Sinus-Reihe

F gerade $\Longrightarrow$ $b_j = 0 \quad \forall\, j \geq 1$ d.h. cosinus-Reihe.

Unsere F ist ungerade $\Rightarrow$ $a_j = 0 \quad \forall\, j \geq 0$.

$$b_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(j\omega x)\,dx \qquad j \geq 1 \qquad \text{wobei} \quad \omega = \frac{\pi}{L}.$$

$f(x) = x(L-x)$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\sin(j\omega x)\,dx = \frac{2}{L}\,L\underline{\int_0^L x\sin(j\omega x)\,dx}$$

$$- \frac{2}{L}\underline{\int_0^L x^2\sin(j\omega x)\,dx}$$

$$\int_0^L x\sin(j\omega x)\,dx \overset{j\geq 1}{=} \int_0^L x\left(\frac{-\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)'dx = -x\,\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\Bigg|_{x=0}^{L} - \int_0^L x'\left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)dx$$

$$= -L\,\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega} + 0\cdot\frac{\cos(j\omega 0)}{j\omega} + \int_0^L \frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\,dx$$

$$= -L\,\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega} + 0 + \int_0^L \frac{(\sin(j\omega x))'}{(j\omega)^2}\,dx$$

$$= -L\,\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega} + \left.\frac{\sin(j\omega x)}{j^2\omega^2}\right|_{x=0}^{L}$$

$$= -L\,\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega} + \frac{\sin(j\omega L)}{j^2\omega^2} - \underbrace{\frac{\overset{0}{\overset{/\!/}{\sin(j\omega\, 0)}}}{j^2\omega^2}}_{=0}$$

$$\omega = \frac{\pi}{L} \quad = -L\,\frac{\cos\left(j\frac{\pi}{L}L\right)}{j\frac{\pi}{L}} + \frac{\sin\left(j\frac{\pi}{L}L\right)}{j^2\frac{\pi^2}{L^2}}$$

$$\sin(j\pi) = 0$$

$$\cos(j\pi) = (-1)^j$$

$$= -\frac{L^2}{\pi}\,\frac{(-1)^j}{j} = \frac{L^2}{\pi}\,\frac{(-1)^{j+1}}{j}$$

$$\int_0^L x^2 \sin(j\omega x)\,dx = \int_0^L x^2 \left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)' dx$$

$$= x^2\left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)\Bigg|_{x=0}^{L} - \int_0^L 2x\left(-\frac{\cos(j\omega x)}{j\omega}\right)dx$$

$$= -L^2\,\frac{\cos(j\omega L)}{j\omega} - 0 + \frac{2}{j\omega}\underbrace{\int_0^L x\cos(j\omega x)\,dx}$$

$$\int_0^L x\cos(j\omega x)\,dx = \int_0^L x\left(\frac{\sin(j\omega x)}{j\omega}\right)' dx = x\,\frac{\sin(j\omega x)}{j\omega}\Bigg|_{x=0}^{L} - \int_0^L 1\cdot\frac{\sin(j\omega x)}{j\omega}\,dx$$

$$= L\,\frac{\sin(j\omega L)}{j\omega} - 0 - \frac{1}{j\omega}\int_0^L \sin(j\omega x)\,dx$$

$$= L\,\frac{\sin(j\omega L)}{j\omega} - \frac{1}{j\omega}\,\frac{-\cos(j\omega x)}{j\omega}\Bigg|_{x=0}^{L}$$

$$= L\,\frac{\sin(j\omega L)}{j\omega} + \frac{1}{j^2\omega^2}\left(\cos(j\omega L) - \underset{\cos(0)}{\underset{\shortparallel}{1}}\right).$$

$$\omega = \frac{\pi}{L} \quad \longrightarrow \quad = L\,\frac{\sin\left(j\frac{\pi}{L}L\right)}{j\omega} + \frac{1}{j^2\omega^2}\left(\cos\left(j\frac{\pi}{L}L\right) - 1\right).$$

$$\sin(j\pi) = 0 \qquad \cos(j\pi) = (-1)^j$$

$$= \frac{L^2}{j^2\pi^2}\left((-1)^j - 1\right).$$

$$\int_0^L x^2 \sin(j\omega x)\,dx = -L^2\,\frac{\cos\left(j\frac{\pi}{L}L\right)}{j\omega} + \frac{2}{j\frac{\pi}{L}}\left(\frac{L^2}{j^2\pi^2}\left((-1)^j - 1\right)\right).$$

$$\cos\left(j\frac{\pi}{L}L\right) \to (-1)^j \qquad \omega = \pi/L$$

$$= \frac{L^3}{j\pi}(-1)^{j+1} + \frac{2L^3}{j^3\pi^3}(-1)^j - \frac{2L}{j\pi}.$$

$$b_j = \underbrace{2\int_0^L x \sin(j\omega x)\,dx}_{= \frac{L^2}{\pi}\frac{(-1)^{j+1}}{j}} - \underbrace{\frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin(j\omega x)\,dx}_{= \frac{L^3}{j\pi}(-1)^{j+1} + \frac{2L^3}{j^3\pi^3}(-1)^j - \frac{2L}{j\pi}}$$

$$= \cancel{2\frac{L^2}{j\pi}(-1)^{j+1}} - \cancel{\frac{2}{j\pi}L^2(-1)^{j+1}} - \frac{4L^2}{j^3\pi^3}\left((-1)^j - 1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{b_j = -\frac{4L^2}{j^3\pi^3}\left((-1)^j - 1\right) = \begin{cases} 0 & j = \text{gerade} \\ 8L^2/j^3\pi^3 & j = \text{ungerade} \end{cases}}$$

---

2. $f(x) = x(L-x) \qquad 0 < x \le L$

Gerade $2L$-periodische Fortsetzung.

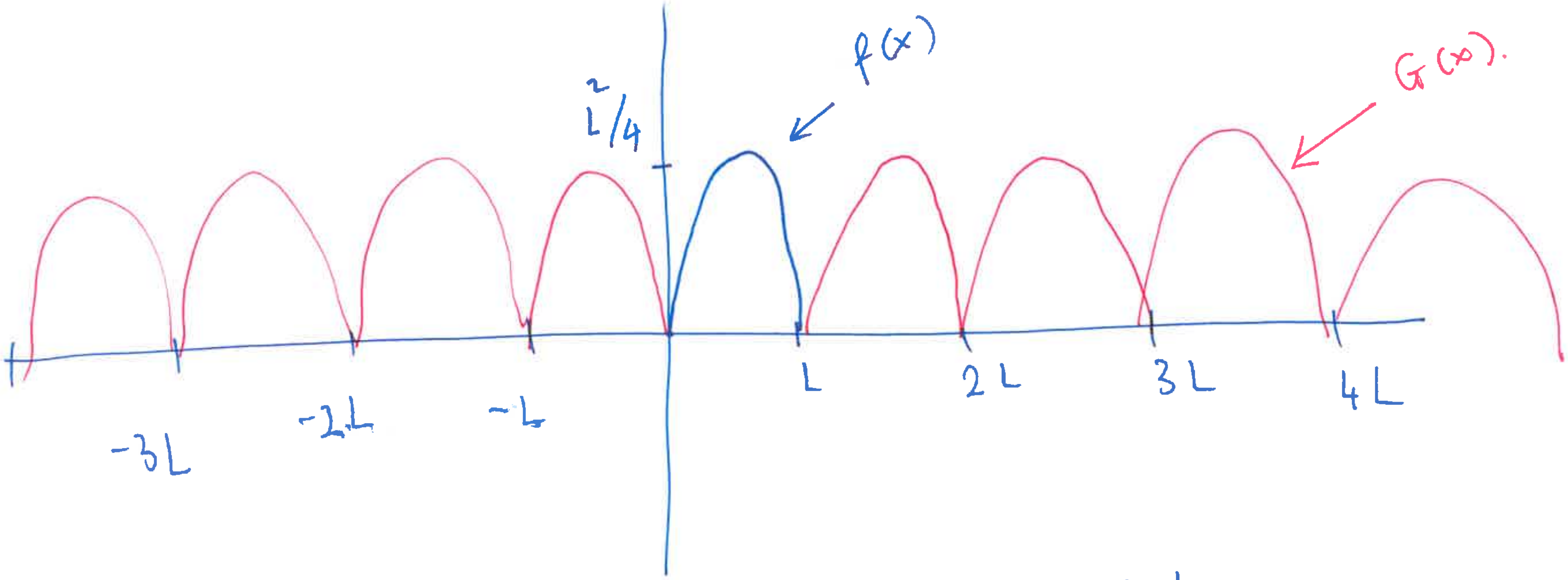
$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Fortsetzung von $f \Rightarrow G(x) = f(x) \qquad 0 < x \le L$

gerade $\Rightarrow G(-x) = G(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$2L$-periodisch $\Rightarrow G(x+2L) = G(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$G(x+2kL) = G(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
$\forall k \in \mathbb{Z}$.



$$G(x) := \begin{cases} f(x) & 0 < x \leq L \\ 0 & x = 0 \\ f(-x) & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, k \in \mathbb{Z}$

$$2kL - L \leq x \leq 2kL + L$$

$$G(x) = G(x - 2kL).$$

Fourier-Reihe.

$$\cancel{G}\quad \text{Fourier}_G(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j\geq 1}^{\infty} a_j \cos(j\omega x) \qquad \boxed{\omega = \frac{\pi}{L}}$$

$$a_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(j\omega x)\,dx \qquad j\geq 0$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\cos(j\omega x)\,dx = 2\int_0^L \underbrace{x\cos(j\omega x)}_{} - \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos(j\omega x)\,dx$$

$$= \left(-\frac{\sin(j\omega x)}{j\omega}\right)'$$

nur für $j\geq 1$ → $j\geq 1$

. . . - - .

$\Rightarrow a_j$ für $j\geq 1$.

$\boxed{j=0}$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\underbrace{\cos(0\cdot\omega x)}_{\cos(0)=1}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\,dx$$

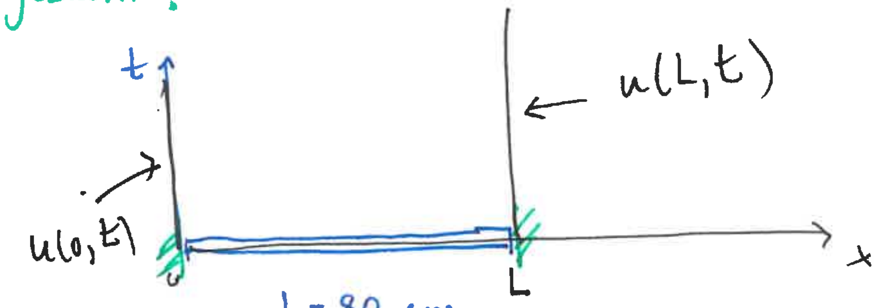
Aufgabe 2

Ort, Zeit, Temperatur

$$u : [0, L] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in [0,L], \quad t \in [0,+\infty) \longmapsto \boxed{u(x,t)}$$

gesucht!



L = 80 cm.

Randbedingungen

Temperatur am Enden ist 0 $\forall t$

$$\boxed{\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \end{aligned}}$$

Anfangsbedingungen

$t = 0$ $\boxed{u(x,0) = f(x)}$

$t=0$ $f(x)$ die Temperatur im Punkt x.

Temperatur am Ende: 0.

Was ist die Temperatur im Punkt x an der Zeit t?

$$\boxed{u_t(x,t) = a^2 \, u_{xx}(x,t)}$$

← Wie die Temperatur ändert.

abhängig von Material

Satz 8.2.6

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Nach Produkt-Ansatz $\Rightarrow$ $$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, u_n(x,t)}$$

Lösung zum $\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$\boxed{u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right)}$$

b_n werden durch die Fourier-Reihe der ungerade 2L-periodisch Fortsetzung von f bestimmt

d.h. ~~f(x) =~~

$$\text{Fourier}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \cancel{\sin(j\omega x)} \, \sin(n\omega x)$$ ← Jetzt j wird n!

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega x)\, dx}$$

8.2.6 im Skript liefert

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$= b_1 \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L} x\right) e^{-\frac{a^2 \cdot 1 \cdot \pi^2}{L^2} t}$$

$b_1 = 100$

$b_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

$$\boxed{u(x,t) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\frac{a^2 \pi^2}{L^2} t}}$$

← Lösung für $f(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

Probe!

2. $f(x) = 100 \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right)$. → $n = 3$.

- 2L-periodisch und ungerade
- die Fourier-Reihe hat $b_1 = 0$, $b_2 = 0$
  $b_3 = 100$, $b_n = 0 \quad \forall n \geq 4$.

L, a

$$u: [0,L] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ?$$
$$(x, t) \longmapsto u(x,t)$$

So dass

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) & \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall\, t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & \forall\, 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

1. $f(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$ $\qquad L = 80.$

In diesem Fall ist f schon ungerade und $2L$-periodisch

die Fourier-Reihe dieser f

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \omega x) \underset{\omega = \pi/L}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right).$$

$b_1 = 100$ und alle anderen $b_n = 0$ für $n \geq 2$.

Mit Satz 8.2.6.

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$= b_3 \sin\left(3\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\frac{a^2 3^2 \pi^2}{L^2} t}$$

nur $b_3 \neq 0$

$b_3 = 100$

und $b_n = 0$

für $n \neq 3$

$$= 100 \sin\left(3\frac{\pi}{L}x\right) e^{-9\frac{a^2\pi^2}{L^2} t}$$

Die Temperatur geht schneller $\longrightarrow 0$ als bei $f(x) = 100\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

3. $f(x) = x(L-x)$. $0 \leq x \leq L$. $F(x)$

Erst braucht man die Fortsetzung von f als eine ungerade $2L$-periodische Funktion und dann die Fourier-Reihe (Aufgabe 1)

$$F(x) \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right).$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

mit b_n von Aufgabe 1.