

Blatt 1

Vortragsübung am Mi 26.10.22, Fr 28.10.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Fubini und Normalbereiche)Integrieren Sie die Funktion $f(x, y) = y \cos(x^2)$ über dem Bereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Aufgabe 2 (Der Satz von Fubini und Normalbereiche)

Wir betrachten die zwei folgenden Integrale.

$$(a) \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos(y)} x^2 \sin(y) \, dx \, dy \qquad (b) \int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy \, dy \, dx$$

Skizzieren Sie jeweils den Integrationsbereich in der xy -Ebene. Welcher Art von Normalbereich ist der jeweilige Integrationsbereich? Berechnen Sie die Integrale.**Aufgabe 3 (Volumen von Drehkörper)**Es sei $r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $r(x) = \sin(x)$. Skizzieren Sie den Drehkörper, der bei Rotation des Graphen von r um die x -Achse im xyz -Raum entsteht. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers.**Aufgabe 4 (Kurvenintegrale und Satz von Green)**

Berechnen Sie die Rotation der Vektorfelder

$$(a) \quad g(x_1, x_2) = (x_2^2 \sin(x_1), x_1^2 + \cos(x_2))^T \qquad (b) \quad h(x_1, x_2) = (-x_2 \sin(x_1), x_2 + \cos(x_1))^T$$

sowie die Integrale $\int_C g(x) \cdot dx$ und $\int_C h(x) \cdot dx$ längs der parabelförmigen Kurve

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -a^2 \leq x_1 \leq 0, \quad x_1 = -a^2 + x_2^2 \right\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.