Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Vortragsübung am Mi 23.11.22, Fr 25.11.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Gauß in 3D)
Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 5 \right\}$ ein Zylinder mit Radius $R = 2$ und Höhe $H = 5$. Sei S seine Oberfläche.
Berechnen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, S)$ des Vektorfeldes $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1^3 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ durch S.

Aufgabe 2 (Transformationsatz in 3D)
Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4 - x^2 - y^2 \leqslant z \leqslant 3\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x-z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$.
2. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten.
3. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung die z-Koordinate $\frac{\iiint_K z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_K 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$ des Schwerpunkts von K.

Aufgabe 3 (Differentialgleichung mit getrennten Variablen)

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -2x\mathrm{e}^y \quad \text{mit} \quad y(0) \;=\; 0\;.$$

2. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = -y^2\;.$$

(Beispiel einer Bernoulli-Differentialgleichung)

Aufgabe 4 (Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung)
Sei $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y\tan(x) = \sin(2x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\;.$$