

Blatt 4

Vortragsübung am Mi 7.12.22, Fr 9.12.22

Aufgabe 1 (Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' + y' - 2y = 0$ mit $y(0) = 4$, $y'(0) = -5$.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' + 8y' + 16y = 0$.
3. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' + 0,2y' + 4,01y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Aufgabe 2 (Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 2y' + 101y = 104e^x \quad \text{mit} \quad y(0) = 11, \quad y'(0) = -9 .$$

Aufgabe 3 (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und spezieller rechter Seite)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = -47 .$$

Aufgabe 4 (Lineare DGL mit nicht konstanten Koeffizienten)

Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{für} \quad x \in (0, +\infty).$$

1. Gibt es Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung der Form $y(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{R}$?
2. Bestimmen Sie alle Lösungen dieser homogenen Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $W(x)$. Berechnen Sie ihre Inverse $W(x)^{-1}$.
4. Wir haben die Bedingung $W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie hieraus Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.
Verwenden Sie diese um eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x$ zu bestimmen.
5. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{mit} \quad y(1) = 1 \quad \text{und} \quad y'(1) = 1 .$$