

Blatt 6

Vortragsübung am Mi 18.01.23, Fr 20.01.23

Aufgabe 1 (homogenes DGS; A diagonalisierbar)Sei A je eine der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.**Aufgabe 2 (homogenes DGS; A nicht diagonalisierbar)**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (inhomogenes DGS; Variation der Konstanten)

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 - 6e^{-2x} \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + 2e^{-2x} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung. Bestimmen Sie dann die Lösung des Anfangswertproblems: $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.**Aufgabe 4 (Fourier Rechnung)**Seien die 2π -periodischen Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

für $-\pi < x \leq \pi$.

1. Skizzieren Sie f und g auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Entwickeln Sie f und g in ihre Fourier-Reihen.
3. In welchen Punkten konvergieren die Fourier-Reihen? Wogegen?
4. Werten Sie die Fourier-Reihen in geeigneten Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ aus und bestimmen Sie so explizit den Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}.$$

5. Bestimmen Sie die Ableitungen f' und g' und ihre Fourier-Reihen.
In welchem Fall gilt die Ableitungsregel aus Satz 7.4.7? In welchem nicht?