

Blatt 7

Vortragsübung am Mi 01.02.23, Fr 03.02.23

Aufgabe 1 (Fourier-Reihen; beliebige Periode)Sei $L > 0$. Es sei $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x(L - x) \quad \text{für } 0 < x < L.$$

- (1) Setzen Sie die Funktion f ungerade und $2L$ -periodisch fort. Berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Fortsetzung.
- (2) Setzen Sie die Funktion f gerade und $2L$ -periodisch fort. Berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Fortsetzung.

Aufgabe 2 (PDE: Die Wärmeleitungsgleichung)Sei $L = 80$ und $a = 1,15$. Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{Anfangswerte für } 0 < x < L \end{aligned}$$

mit

$$(1) f(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{80}\right), \quad (2) f(x) = 100 \sin\left(\frac{3\pi x}{80}\right), \quad (3) f(x) = x(L - x) \text{ für } 0 < x < L.$$

Konkretes Problem aus der Praxis: Bestimmen Sie die Temperatur $u(x, t)$ in einem seitlich isolierten Kupferstab von 80 cm Länge, wenn die Anfangstemperatur $100 \sin(\pi x/80)^\circ\text{C}$ beträgt und die Enden auf 0°C gehalten werden. Wie lange dauert es, bis die Höchsttemperatur in der Stange auf 50°C sinkt?

Physikalische Daten für Kupfer: Dichte $\rho = 8,92 \text{ g/cm}^3$, spezifische Wärme $\sigma = 0,092 \text{ cal/(g K)}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0,95 \text{ cal/(cm s K)}$. Die Temperaturleitfähigkeit des Kupfers ist dann $a^2 = \lambda/(\sigma\rho) = 1,158 \text{ cm}^2/\text{s}$.