Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–7** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **14.10.2024** im Campus-System bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (2+1+4+1+1 = 9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{für } \;\; 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \;\; \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\,. \end{cases}$$

Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade.

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

(b) Bestimmen Sie an der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\operatorname{Fourier}_f(\frac{\pi}{2})$ der Fourier-Reihe.

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(d) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

(e) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$.

Aufgabe 2 (3+2+2+1 = 8 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Es ist $w := \begin{pmatrix} -4+2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 2 - \mathrm{i}$.

Sei $b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' \;=\; Ay + b(x)\,.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Berechnen Sie für die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ die Determinante $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}$ und dann $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + b(x)$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay + b(x)$.

Bitte wenden →

Aufgabe 3 (1+1+1+1+3+1 = 8 Punkte)

Sei $J := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2+v^2 \leqslant 4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r \in [0,2],\ \varphi \in [0,2\pi] \right\}$.

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$. Sei $S := \Phi(J)$.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1,x_2,x_3) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung mit einer Funktion C.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $(\Phi \circ C)(t) = \Phi(C(t))$ und deren Ableitung $(\Phi \circ C)'(t)$.

(c) Berechnen Sie $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral unter Verwendung von (b).

(d) Bestimmen Sie $\Phi_u \times \Phi_v$.

(e) Berechnen Sie $\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O$ als Flächenintegral unter Verwendung von Polarkoordinaten.

(f) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (c) und (e) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Aufgabe 4 (1+3+1 = 5 Punkte) Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; 4u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \;=\; 0\,, \qquad u_t(x,0) \;=\; \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $u(x,t)$ unter Verwendung der d'Alembertschen Formel.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wellengleichung $u_{tt} \;=\; 4u_{xx}$ und in die Anfangsbedingung $u_t(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to+\infty} u(0,t)$.

Aufgabe 5 (1+2+1 = 4 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y \;=\; 1,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstandenen Gleichung an
und setzen Sie die Anfangswerte $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$ ein.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstandenen Ausdruck für $F(s)$ an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

Name, Vorname: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 (1+2+1 = 4 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 3y = 0\ .$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ von $y'' + 2y' - 3y = 0$:

$p(X) =$

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die betrachtete Differentialgleichung:

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$ für $y'' + 2y' - 3y = 0$:

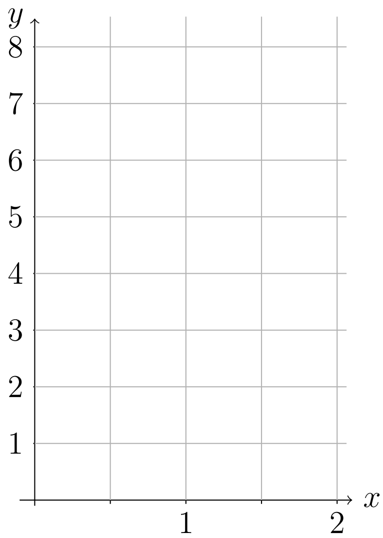
Aufgabe 7 (2 Punkte)

Wir betrachten die Kurve $K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \mathrm{e}^x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^2 \right\}$.

Sei R der Drehkörper, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.

Skizzieren Sie K. Verwenden Sie hierbei die Näherung $\mathrm{e} \approx 2{,}7$. Berechnen Sie das Volumen V von R.

Skizze von K:



$V =$