Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–7** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **14.10.2024** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+1+4+1+1 = 9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{für } \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \quad \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\,. \end{cases}$$

Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade.

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

(b) Bestimmen Sie an der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\operatorname{Fourier}_f(\frac{\pi}{2})$ der Fourier-Reihe.

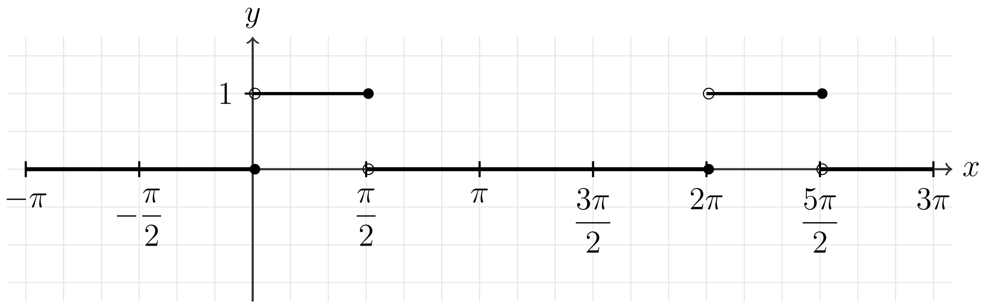
(c) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(d) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

(e) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$.

Lösung.

(a) Skizze des Graphen von $f(x)$:



(b) Es ist $\operatorname{Fourier}_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) + \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$.

(c) Es wird

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\pi}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Für $n \geqslant 1$ wird

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\pi}[\tfrac{1}{n}\sin(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Für $n \geqslant 1$ wird

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\pi}[-\tfrac{1}{n}\cos(nx)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{n\pi}\left(-\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)+1\right)\ . \end{aligned}$$

Damit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Fourier}_f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx) \\ &= \frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\sin(nx)\ . \end{aligned}$$

(d) Es ist für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x &= [\tfrac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}}-\tfrac{1}{-\mathrm{i}k} \\ &= \tfrac{\mathrm{i}}{k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}}-1)\ . \end{aligned}$$

(e) Die komplexe Fourier-Reihe ist gegeben durch

$$\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

wobei

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.$$

Für $k=0$ wird

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2\pi}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{4}\ . \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (d) ist $c_k=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{i}}{k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}}-1)$ für $k\neq 0$ und also

$$\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) = \tfrac{1}{4}+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\tfrac{\mathrm{i}}{2\pi k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

Alternativ kann man ausnutzen, dass die Koeffizienten c_k von $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ mit den Koeffizienten a_k, b_k von $\mathrm{Fourier}_f(x)$ in folgender Beziehung stehen:

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_k=\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2},\quad c_{-k}=\frac{a_k+\mathrm{i}b_k}{2}\quad \text{für } k\geqslant 1.$$

Es wird daher für $k \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \\
c_k &= \frac{\frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \mathrm{i}\,\frac{1}{k\pi}\left(-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 1\right)}{2} = \frac{\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right)}{2k\pi} &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\pi k} - 1)}{2k\pi} \\
c_{-k} &= \frac{\frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\frac{1}{k\pi}\left(-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 1\right)}{2} = \frac{-\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right)}{2k\pi} &= \frac{-\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\pi k} - 1)}{2k\pi} \\
&&= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\pi(-k)} - 1)}{2(-k)\pi}
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) = \tfrac{1}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \tfrac{\mathrm{i}}{2\pi k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} - 1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}
$$

Aufgabe 2 (3+2+2+1 = 8 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Es ist $w := \begin{pmatrix} -4+2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 2 - \mathrm{i}$.

Sei $b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' \;=\; Ay + b(x)\;.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Berechnen Sie für die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ die Determinante $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}$ und dann $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay + b(x)$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay + b(x)$.

Lösung.

(a) Mit $z := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $Az = 2z$. Also ist z ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2. Dies gibt die vektorwertige Lösung

$$f_{[1]}(x) \;=\; \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\;.$$

Wir bestimmen ausgehend von w noch zwei vektorwertige Lösungen.
Es ist $w = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u + \mathrm{i}v$ mit $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Es ist $\lambda = 2 - \mathrm{i} = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha = 2$ und $\beta = -1$.

Wir erhalten die beiden vektorwertigen Lösungen

$$f_{[2]}(x) \;=\; \mathrm{e}^{2x}(\cos(-x)\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(-x)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \;=\; \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -4\cos(x)+2\sin(x) \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

und

$$f_{[3]}(x) \;=\; \mathrm{e}^{2x}(\sin(-x)\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(-x)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \;=\; \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 4\sin(x)+2\cos(x) \\ \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}\;.$$

Die Wronskimatrix zu $f_{[1]}(x)$, $f_{[2]}(x)$, $f_{[3]}(x)$ ist

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) \;=\; \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 & -4\cos(x)+2\sin(x) & 4\sin(x)+2\cos(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix}$$

Somit wird

$$\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) \;=\; \det\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1\;.$$

Da $\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) \neq 0$, liegt in der Tat ein Fundamentalsystem vor.

(b) Wir berechnen zunächst $\mathrm{W_{sys}}(0)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $\mathrm{W_{sys}}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Damit wird

$$\begin{aligned} \mathrm{W_{sys}}(x)^{-1} &= \mathrm{W_{sys}}(0)^{-1}\,\mathrm{W_{sys}}(-x)\,\mathrm{W_{sys}}(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 & -4\cos(x)-2\sin(x) & -4\sin(x)+2\cos(x) \\ 0 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Wir setzen an:

$$c'(x) = \mathrm{W_{sys}}(x)^{-1}\,b(x) = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Wir leiten auf zu:

$$c(x) = \begin{pmatrix} -2x \\ -\cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Als partikuläre Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{p}}(x) &= \mathrm{W_{sys}}(x)\,c(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 & -4\cos(x)+2\sin(x) & 4\sin(x)+2\cos(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x \\ -\cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} -2x+4\cos(x)^2-2\sin(x)\cos(x)+4\sin(x)^2+2\cos(x)\sin(x) \\ -\sin(x)\cos(x)+\cos(x)\sin(x) \\ -\cos(x)^2-\sin(x)^2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} -2x+4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Jede Lösung ist von der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{\mathrm{p}}(x) + d_1 f_{[1]}(x) + d_2 f_{[2]}(x) + d_3 f_{[3]}(x) \\ &= \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} -2x+4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d_1 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} -4\cos(x)+2\sin(x) \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + d_3 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 4\sin(x)+2\cos(x) \\ \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $d_1,\ d_2,\ d_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+3+1 = 8 Punkte)

Sei $J := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2 + v^2 \leqslant 4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r \in [0,2],\ \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$.

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$. Sei $S := \Phi(J)$.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung mit einer Funktion C.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $(\Phi \circ C)(t) = \Phi(C(t))$ und deren Ableitung $(\Phi \circ C)'(t)$.

(c) Berechnen Sie $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral unter Verwendung von (b).

(d) Bestimmen Sie $\Phi_u \times \Phi_v$.

(e) Berechnen Sie $\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \, \mathrm{d}O$ als Flächenintegral unter Verwendung von Polarkoordinaten.

(f) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (c) und (e) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Lösung.

(a) Wir parametrisieren den Rand von J mittels $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

(b) Es ist $(\Phi \circ C)(t) = \Phi(C(t)) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ (2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 4 \end{pmatrix}$.

Davon die Ableitung ist $(\Phi \circ C)'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Es wird

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} g(\Phi(C(t))) \bullet (\Phi \circ C)'(t)\, \mathrm{d}t \\ &\overset{\text{(b)}}{=} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \cdot 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 4\, \mathrm{d}t \\ &= 8\pi\,. \end{aligned}$$

(d) Es wird

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Zunächst ist $\operatorname{rot}(g)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Damit wird

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \, \mathrm{d}O &= \iint_J \operatorname{rot}(g)(\Phi(u,v)) \bullet (\Phi_u \times \Phi_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&\overset{\text{(d)}}{=} \iint_J \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \iint_J (u^2+v^2)(-2u) + 2 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} \big(((r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2)(-2r\cos(\varphi)) + 2\big) \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} -2r^4\cos(\varphi) + 2r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{r=0}^{r=2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} -2r^4\cos(\varphi) + 2r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{r=2} [-2r^4\sin(\varphi) + 2r\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{r=2} 0 + 2r \cdot 2\pi \, \mathrm{d}r \\
&= [2r^2 \cdot \pi]_{r=0}^{r=2} \\
&= 8\pi \; .
\end{aligned}$$

(f) Wir erhalten

$$\int_{\partial S} g(x) \bullet \, \mathrm{d}x \overset{\text{(c)}}{=} 8\pi \overset{\text{(e)}}{=} \iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \, \mathrm{d}O \; .$$

Dies bestätigt den Satz von Stokes im vorliegenden Fall.

Aufgabe 4 (1+3+1 = 5 Punkte) Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; 4u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \;=\; 0\,, \qquad u_t(x,0) \;=\; \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $u(x,t)$ unter Verwendung der d'Alembertschen Formel.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wellengleichung $u_{tt} \;=\; 4u_{xx}$ und in die Anfangsbedingung $u_t(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to+\infty} u(0,t)$.

Lösung.

(a) Mit der d'Alembertschen Formel wird, unter Verwendung von $c = 2$, $f(x) = 0$ und $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}(f(x-2t) + f(x+2t)) + \tfrac{1}{2\cdot 2}\int_{x-2t}^{x+2t} g(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \tfrac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{d}s \\ &= \tfrac{1}{4}[\arctan(s)]_{x-2t}^{x+2t} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\arctan(x+2t) - \arctan(x-2t)\right)\;. \end{aligned}$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} u_t &= \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{4}\left(\arctan(x+2t) - \arctan(x-2t)\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{(x+2t)^2+1}\cdot 2 - \tfrac{1}{(x-2t)^2+1}\cdot(-2)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{(x+2t)^2+1} + \tfrac{1}{(x-2t)^2+1}\right)\;. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{(x+2t)^2+1} + \tfrac{1}{(x-2t)^2+1}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{((x+2t)^2+1)^2}\cdot 2(x+2t)\cdot 2 - \tfrac{1}{((x-2t)^2+1)^2}\cdot 2(x-2t)\cdot(-2)\right) \\ &= -\tfrac{2(x+2t)}{((x+2t)^2+1)^2} + \tfrac{2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2}\;. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{4}\left(\arctan(x+2t) - \arctan(x-2t)\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{(x+2t)^2+1} - \tfrac{1}{(x-2t)^2+1}\right)\;. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{(x+2t)^2+1} - \tfrac{1}{(x-2t)^2+1}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{((x+2t)^2+1)^2}\cdot 2(x+2t)\cdot 1 + \tfrac{1}{((x-2t)^2+1)^2}\cdot 2(x-2t)\cdot 1\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{x+2t}{((x+2t)^2+1)^2} + \tfrac{x-2t}{((x-2t)^2+1)^2}\right)\;. \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $u_{tt} = 4u_{xx}$.

Es wird

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= (\tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t))|_{t=0} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{x^2+1} + \tfrac{1}{x^2+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{x^2+1}\ , \end{aligned}$$

wie verlangt.

(c) Da $\arctan(x)$ eine ungerade Funktion ist, wird

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} u(0,t) &= \lim_{t\to+\infty} \tfrac{1}{4}\,(\arctan(2t) - \arctan(-2t)) \\ &= \lim_{t\to+\infty} \tfrac{1}{2}\arctan(2t) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} \\ &= \tfrac{\pi}{4}\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (1+2+1 = 4 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y \;=\; 1,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstandenen Gleichung an
und setzen Sie die Anfangswerte $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$ ein.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstandenen Ausdruck für $F(s)$ an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

Lösung.

(a) Da $f(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, gilt

$$f''(t) - f(t) \;=\; 1\;.$$

Da $f(t)$ auch die Anfangsbedingungen erfüllt, ist zudem $f(0) = 0$ und $f'(0) = -1$.

Laplace-Transformation auf beiden Seiten liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} s^2F(s) - sf(0) - f'(0) - F(s) &= \mathcal{L}\,(1) \\ &= \tfrac{1}{s}\;, \end{aligned}$$

nach Einsetzen der Anfangswerte $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$ also

$$s^2F(s) + 1 - F(s) \;=\; \frac{1}{s}.$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} s^2F(s) + 1 - F(s) &= \tfrac{1}{s} \\ F(s)(s^2 - 1) &= \tfrac{1}{s} - 1 \\ F(s) &= \tfrac{1}{s(s^2-1)} - \tfrac{1}{s^2-1} \\ F(s) &= \tfrac{1-s}{s(s^2-1)} \\ F(s) &= -\tfrac{1}{s(s+1)}. \end{aligned}$$

Ansetzen von Partialbruchzerlegung ergibt mit $A, B \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{s(s+1)} &= \tfrac{A}{s} + \tfrac{B}{s+1} \\ &= \tfrac{A(s+1)+Bs}{s(s+1)} \\ &= \tfrac{As+A+Bs}{s(s+1)}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A &= -1 \end{aligned}$$

Also ist $A = -1$ und $B = 1$.

Damit wird

$$\begin{aligned} F(s) &= -\tfrac{1}{s(s+1)} \\ &= \tfrac{1}{s+1} - \tfrac{1}{s} \ . \end{aligned}$$

(c) Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-t} - 1. \end{aligned}$$

Name, Vorname: | **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 (1+2+1 = 4 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 3y = 0\ .$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ von $y'' + 2y' - 3y = 0$:

$p(X) =$ $\boxed{X^2 + 2X - 3}$

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die betrachtete Differentialgleichung:

$\boxed{\mathrm{e}^{-3x}, \qquad \mathrm{e}^{x}}$

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$ für $y'' + 2y' - 3y = 0$:

$\boxed{-\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{x}}$

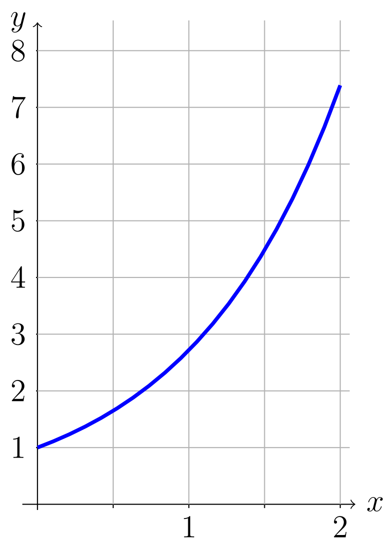
Aufgabe 7 (2 Punkte)

Wir betrachten die Kurve $K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \mathrm{e}^x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^2 \right\}$.

Sei R der Drehkörper, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.

Skizzieren Sie K. Verwenden Sie hierbei die Näherung $\mathrm{e} \approx 2{,}7$. Berechnen Sie das Volumen V von R.

Skizze von K:



$V = \boxed{\dfrac{\pi(\mathrm{e}^4 - 1)}{2}}$