Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 1

Hausaufgabe 1 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ y \leqslant x,\ x^2 \leqslant 4y \}$.

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der x-Achse dar.

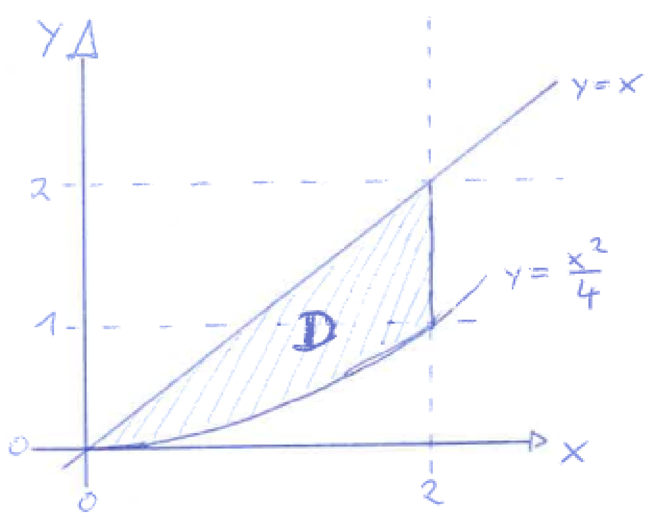
Berechnen Sie damit $\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(c) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar.

Berechnen Sie damit $\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Lösung.

(a) Der Bereich D ist in der Grafik hervorgehoben.



(b) Umschreiben der Bedingungen ergibt $D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ \frac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant x \}$ für eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der x-Achse.

Damit wird das Integral berechnet:

$$\begin{aligned}
\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^x xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[\int_{\frac{x^2}{4}}^x x\frac{y^2}{2} \,\mathrm{d}y \right]_{y=\frac{x^2}{4}}^x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\frac{x^4}{16} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{6 \cdot 32} \right]_0^2 \\
&= 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

(c) Sei

$$h(y) \;:=\; \begin{cases} 2\sqrt{y} & \text{falls } y \in [0,1] \\ 2 & \text{falls } y \in [1,2] \end{cases}$$

Dann ist $D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant y \leqslant 2,\ y \leqslant x \leqslant h(y) \}$ eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der y-Achse.

Es wird

$$\begin{aligned}
\iint_D xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_y^{h(y)} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_y^{2\sqrt{y}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_y^2 xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y \right]_{x=y}^{x=2\sqrt{y}} \mathrm{d}y + \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2 y \right]_{x=y}^{x=2} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2y^2 - \frac{1}{2}y^3 \,\mathrm{d}y + \int_1^2 2y - \frac{1}{2}y^3 \,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{8}y^4 \right]_0^1 + \left[y^2 - \frac{y^4}{8} \right]_1^2 \\
&= ((\frac{2}{3} - \frac{1}{8}) - (0 - 0)) + ((4 - 2) - (1 - \frac{1}{8})) \\
&= \frac{5}{3}\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2

Sei $K_1 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 = 1,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \}$.
Sei $K_2 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 = 2,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \}$.

(a) Skizzieren Sie K_1 und K_2 in ein Koordinatensystem.

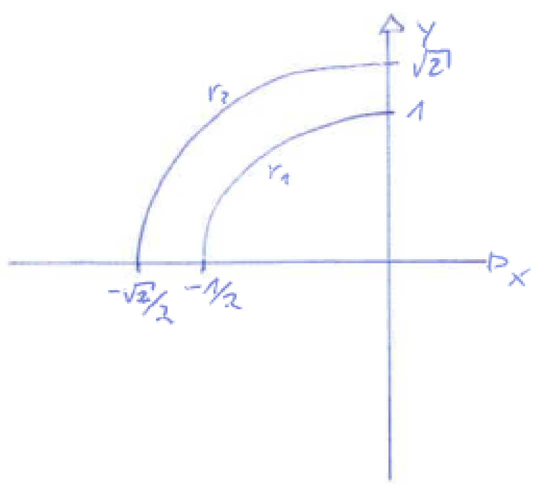
(b) Sei R_1 der Drehkörper, der durch Rotation von K_1 um die x-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen V_1 von R_1.

(c) Sei R_2 der Drehkörper, der durch Rotation von K_2 um die x-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen V_2 von R_2.

(d) Sei $R := R_2 \setminus R_1$ die Schale, die aus R_2 durch Herausnahme von R_1 entsteht. Berechnen Sie das Volumen V der Schale R.

Lösung.

(a) Skizze, in welcher K_1 der Graph der Funktion r_1 ist und K_2 der Graph der Funktion r_2.



(b) Die Kurve K_1 wird durch die Funktion

$$r_1(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$$

beschrieben. Wir können für das Volumen V_1 von R_1 die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

$$V_1 = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{0} r_1(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 1 - 4x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \left[x - \frac{4}{3}x^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{\pi}{3}.$$

(c) Die Kurve K_2 wird durch die Funktion

$$r_2(x) = \sqrt{2 - 4x^2}$$

beschrieben. Wir können für das Volumen V_2 von R_2 die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} r_2(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} 2 - 4x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \left[2x - \frac{4}{3}x^3 \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \\ &= \pi(\sqrt{2} - \frac{4}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$

(d) Das Volumen der Schale $R := R_2 \setminus R_1$ ist die Differenz der einzelnen Volumina:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Hausaufgabe 3

Sei $D := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei K die geschlossene Kurve, von der D berandet wird, positiv orientiert parametrisiert.

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1^2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie D.

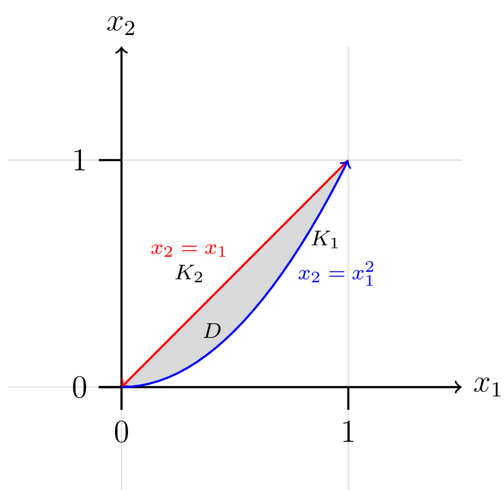
(b) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(c) Berechnen Sie $\iint_D \operatorname{rot} g(x) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Lösung.

(a) Skizze von D:



(b) Die Zirkulation wird durch Anwendung der Formel

$$Z(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{a_j}^{b_j} g(C_j(t)) \bullet C_j'(t) \, \mathrm{d}t$$

berechnet.

Wir betrachten den in der Abbildung dargestellten Bereich D und die positiv orientierte Kurve K, die ihn umschließt. Wir zerlegen die Kurve K wie in (a) skizziert in zwei Teilkurven, $K = K_1 \cup K_2$.

Die Teilkurve K_1 parametrisieren wir mittels:

$$C_1(t) = \binom{t}{t^2} \quad \text{für } t \in [0,1] \qquad\qquad C_1'(t) = \binom{1}{2t}$$

Die Teilkurve K_2 parametrisieren wir mittels:

$$C_2(t) = \binom{1-t}{1-t} \quad \text{für } t \in [0,1] \qquad\qquad C_2'(t) = \binom{-1}{-1}$$

Für jede Teilkurve berechnen wir den Beitrag zur Zirkulation:

$$Z_1 = \int_0^1 \binom{t^4}{-t^2} \bullet \binom{1}{2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^4 - 2t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$$

$$Z_2 = \int_0^1 \binom{(1-t)^2}{-(1-t)^2} \bullet \binom{-1}{-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$$

Daraus ergibt sich die Zirkulation $\mathrm{Z}(g,K) = Z_1 + Z_2 = -\frac{3}{10}$.

(c) Nun berechnen wir

$$\iint_D \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

Wir wenden die Definition der Rotation an und erhalten

$$\operatorname{rot} g(x) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -2x_1 - 2x_2.$$

Wir setzen ein und berechnen das Integral über D als Normalbereich bezüglich der x_1-Achse:

$$\begin{aligned}\iint_D \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &= \int_0^1 \int_{x_1^2}^{x_1} -2x_1 - 2x_2\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \left[-2x_1x_2 - x_2^2\,\mathrm{d}x_2\right]_{x_2=x_1^2}^{x_2=x_1}\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^1 (-2x_1^2 - x_1^2) - (-2x_1^3 - x_1^4)\,\mathrm{d}x_1 = \int_0^1 -3x_1^2 + 2x_1^3 + x_1^4\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \left[-x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^4 + \frac{1}{5}x_1^5\right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = -\frac{3}{10}\end{aligned}$$

(d) Es wird

$$\mathrm{Z}(g,K) \overset{\text{(b)}}{=} -\frac{3}{10} \overset{\text{(c)}}{=} \iint_D \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ ,$$

was den Satz von Green im vorliegenden Fall bestätigt.