Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 2

Hausaufgabe 4 Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_2 \geqslant 0 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet. Sei K positiv orientiert parametrisiert.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x_1, x_2) := \left(\begin{smallmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(b) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

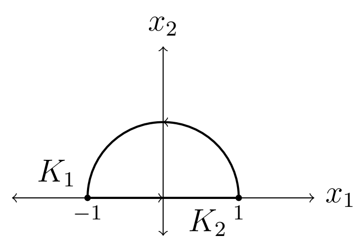
(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und aus (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Lösung.

(a) Wir zerlegen die Kurve K in zwei Teilkurven $K = K_1 \cup K_2$.

Die Teilkurven K_1 und K_2 parametrisieren wir wie folgt:

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(t) \\ C_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},\ t \in [0, \pi], \quad C_2(t) = \begin{pmatrix} C_{2,1}(t) \\ C_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in [-1, 1].$$



Der Ausfluss wird wie folgt berechnet.

$$\mathrm{A}(g, K) = \underbrace{\int_0^\pi g\big(C_1(t)\big) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t}_{=:A_1} + \underbrace{\int_0^1 g\big(C_2(t)\big) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t}_{=:A_2}.$$

Es wird

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\pi \left(\begin{smallmatrix} 2\cos(t)+\sin(t) \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \bullet \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi 2\cos(t)^2 + \sin(t)\cos(t) + \sin(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi 1 + \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \sin(t)\, \mathrm{d}t \\ &= [t + \tfrac{1}{2}\sin(2t) - \tfrac{1}{4}\cos(2t) - \cos(t)]_0^\pi \\ &= (\pi - 0) + 0 + 0 + (1 - (-1)) \ = \ \pi + 2\,. \end{aligned}$$

Hierbei wurde $\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 2\cos(t)^2 - 1$ und $\sin(2t) = \sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t) = 2\sin(t)\cos(t)$ verwandt.

Es wird

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-1}^{1} \left(\begin{smallmatrix} 2t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right) \bullet \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} -t^2 \, \mathrm{d}t \\ &= [-\tfrac{1}{3}t^3]_{-1}^{1} \\ &= -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{2}{3} \,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K) = A_1 + A_2 = \pi + 2 - \frac{2}{3} = \pi + \frac{4}{3}$.

(b) Die Divergenz von g ist

$$\mathrm{div}(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2 + 2x_2.$$

Wir verwenden die Polarkoordinatentransformation $x_1 = r\cos(\varphi), \quad x_2 = r\sin(\varphi)$, wobei $0 \leqslant r \leqslant 1$ und $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \int\int_J \mathrm{div}(g) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 &= \int\int_J \mathrm{div}(g)(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{r=0}^{r=1} (2 + 2r\sin(\varphi)) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \left[r^2 + \frac{2r^3}{3} \sin(\varphi) \right]_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} 1 + \frac{2}{3} \sin(\varphi) \mathrm{d}\varphi \\ &= \left[\varphi - \frac{2}{3} \cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \\ &= \left(\pi - \frac{2}{3}(\cos(\pi) - \cos(0)) \right) = \pi + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(c) Wir haben

$$\pi + \frac{4}{3} \overset{\text{(a)}}{=} \mathrm{A}(g, K) \overset{\text{Gauß}}{=} \int\int_J \mathrm{div}(g) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \overset{\text{(b)}}{=} \pi + \frac{4}{3} \,.$$

Die Ergebnisse aus (a) und (b) stimmen überein, wie der Satz von Gauß (1.5.7) es vorhersagt.

Hausaufgabe 5 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \leqslant 0 \}$.

(a) Verwenden Sie die Polarkoordinatentransformation ψ.

Finden Sie $B \subseteq \{ \binom{r}{\varphi} \in \mathbb{R}^2 \mid r \geqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi] \}$ mit $\psi(B) = D$.

(b) Skizzieren Sie B im r-φ-Koordinatensystem. Skizzieren Sie D im x-y-Koordinatensystem.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_D \frac{4}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

mittels einer Substitution unter Verwendung von ψ.

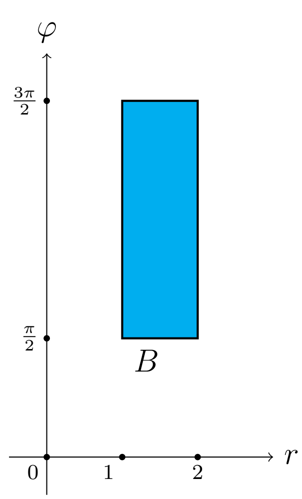
Lösung.

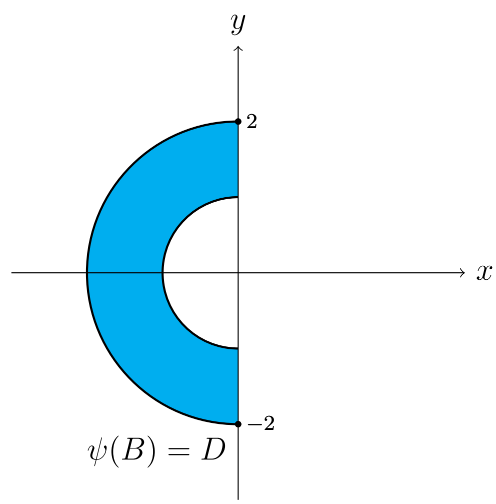
(a) Die Polarkoordinatentransformation $\psi : B \to D$ ist gegeben durch

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

wobei $B := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant r \leqslant 2;\quad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \right\}$. Es ist dann $\psi(B) = D$.

(b) Die Skizzen von B und D sind unten dargestellt.





(c) Mit der Substitution aus (a) lässt sich das Integral wie folgt berechnen.

$$
\begin{aligned}
\int\int_D \frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_1^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{4}{\sqrt{4-r^2}}\,r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_1^2 \pi \frac{4}{\sqrt{4-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r \\
&\overset{u=4-r^2}{\underset{\mathrm{d}u=-2r\,\mathrm{d}r}{=}} \int_3^0 \pi - 2u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_3^0 -2\pi u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^3 2\pi u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= [2\pi \cdot 2u^{1/2}]_{u=0}^{u=3} \\
&= 2\pi \cdot 2 \cdot 3^{1/2} \\
&= 4\pi\sqrt{3}\,.
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 6

Sei $B := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant 2 \}$.

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{u}{v} \mapsto \psi(u, v) = \binom{u+2v}{u-2v}$. Sei $D := \psi(B) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie $\psi(B) = D$ in der x-y-Ebene.

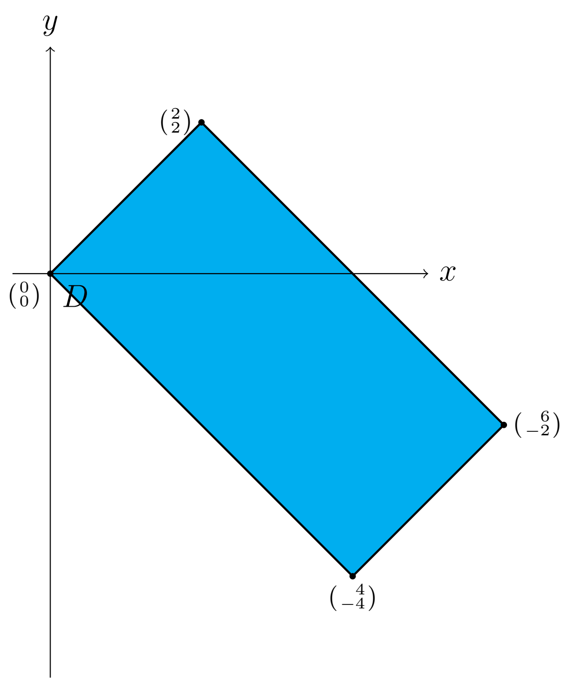
(b) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $|\det \mathrm{J}\psi(u, v)|$.

(c) Berechnen Sie $\iint_D x \cos(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Lösung.

(a) Es ist $\psi(0, 0) = \binom{0}{0}$, $\psi(2, 0) = \binom{2}{2}$, $\psi(0, 2) = \binom{4}{-4}$, $\psi(2, 2) = \binom{6}{-2}$.

Skizze von D:



(b) Es wird

$$|\det \mathrm{J}\psi(u, v)| \;=\; \left|\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+2v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+2v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(u-2v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-2v) \end{pmatrix}\right| \;=\; \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right| \;=\; |-4| \;=\; 4\,.$$

(c) Mit $f(x,y) = x\cos(x+y)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_B f(u+2v, u-2v)\,|\det \mathrm{J}\psi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{v=0}^{v=2}\int_{u=0}^{u=2} (u+2v)\cos(2u)\cdot 4\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{v=0}^{v=2} 4\left(\left[(u+2v)\tfrac{1}{2}\sin(2u)\right]_{u=0}^{u=2} - \int_{u=0}^{u=2}\tfrac{1}{2}\sin(2u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{v=0}^{v=2} 4\left((1+v)\sin(4) - \left[-\tfrac{1}{4}\cos(2u)\right]_{u=0}^{u=2}\right)\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{v=0}^{v=2} 4\left((1+v)\sin(4) + \tfrac{1}{4}\cos(4) - \tfrac{1}{4}\right)\,\mathrm{d}v \\
&= \left[(4v+2v^2)\sin(4) + v\cos(4) - v\right]_{v=0}^{v=2} \\
&= 16\sin(4) + 2\cos(4) - 2\ .
\end{aligned}$$