Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 3

Hausaufgabe 7 Sei

$$S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x+y),\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

(a) Geben Sie eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $\Phi : J \to \mathbb{R}^3$ an mit $\Phi(J) = S$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{F}(S)$.

Lösung.

(a) Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [-2,2] \}$. Sei

$$\Phi \;:\; J \;\to\; \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \;\mapsto\; \Phi(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh(x+y) \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$\Phi(J) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh(x+y) \end{pmatrix} \mid x \in [-1,1],\ y \in [-2,2] \right\} \;=\; S .$$

(b) Es ist

$$\Phi_x(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_y(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y) \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Also wird

$$\begin{aligned} |\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y)| \;&=\; \sqrt{(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y))^2 + (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sinh(x+y))^2 + 1^2} \\ &=\; \sqrt{\sinh(x+y)^2 + 1} \;=\; \cosh(x+y) . \end{aligned}$$

Somit wird

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(S) \;&=\; \textstyle\iint_J |\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &=\; \textstyle\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} \cosh(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &=\; \textstyle\int_{-1}^{1} [\sinh(x+y)]_{y=-2}^{y=2}\,\mathrm{d}x \\ &=\; \textstyle\int_{-1}^{1} \sinh(x+2) - \sinh(x-2)\,\mathrm{d}x \\ &=\; [\cosh(x+2) - \cosh(x-2)]_{x=-1}^{x=1} \\ &=\; (\cosh(3) - \cosh(-1)) - (\cosh(1) - \cosh(-3)) \\ &=\; 2(\cosh(3) - \cosh(1)) . \end{aligned}$$

Hausaufgabe 8 Sei $J := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{4} \}$.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \mathrm{e}^{2u} \\ \sin(v) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\Phi_u(u,v)$, $\Phi_v(u,v)$ und $\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)$.

(b) Sei $S := \Phi(J)$. Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto h(x,y,z) = y(x^2+z^2)$.

Berechnen Sie

$$\iint_S h \,\mathrm{d}O.$$

Lösung.

(a) Es ist $\Phi_u(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{e}^{2u} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ 0 \\ \cos(v) \end{pmatrix}$.

Also ist $\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{e}^{2u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ 0 \\ \cos(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2u}\cos(v) \\ 0 \\ 2\mathrm{e}^{2u}\sin(v) \end{pmatrix}$.

(b) Es wird

$$h(\Phi(u,v)) \;=\; h(\cos(v), \mathrm{e}^{2u}, \sin(v)) \;=\; \mathrm{e}^{2u}(\cos(v)^2 + \sin(v)^2) \;=\; \mathrm{e}^{2u}\ .$$

Es wird

$$\begin{aligned} |\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)| &= \sqrt{(2\mathrm{e}^{2u}\cos(v))^2 + 0^2 + (2\mathrm{e}^{2u}\sin(v))^2} \\ &= 2\mathrm{e}^{2u}\sqrt{\cos(v)^2 + \sin(v)^2} \\ &= 2\mathrm{e}^{2u}\ . \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_S h\,\mathrm{d}O &= \textstyle\iint_J h(\Phi(u,v)) \cdot |\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \textstyle\int_{v=0}^{v=\pi/4} \int_{u=0}^{u=1} \mathrm{e}^{2u} \cdot 2\mathrm{e}^{2u} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \textstyle\frac{\pi}{4} \int_{u=0}^{u=1} 2\mathrm{e}^{4u}\,\mathrm{d}u \\ &= \textstyle\frac{\pi}{4} [\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4u}]_{u=0}^{u=1} \,\mathrm{d}u \\ &= \textstyle\frac{\pi}{8}(\mathrm{e}^4 - 1)\ . \end{aligned}$$

Hausaufgabe 9 Sei $D := [0, 2\pi] \times [0, 3]$. Sei $\Phi : D \to \mathbb{R}^3 : \binom{\varphi}{z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$.

Sei $J := \{ \binom{\varphi}{z} \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ \varphi^2 \leqslant z \leqslant \frac{\pi^2}{4} \} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei $S := \Phi(J) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Skizzieren Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie $\Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ und darin $\Phi(J) = S$.

(b) Bestimmen Sie $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{4}, 1) \times \Phi_z(\frac{\pi}{4}, 1)$.
Zeichnen Sie diesen Vektor in die Skizze aus (a) ein, angesetzt an $\Phi(\frac{\pi}{4}, 1)$.

(c) Es parametrisiert $C : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \binom{t}{t^2}$ ein Stück des Randes von J.
Es parametrisiert $(\Phi \circ C)(t)$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ein Stück des Randes ∂S von S.

Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)'(t)$ und $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4})$.
Zeichnen Sie diesen Vektor in die Skizze aus (a) ein, angesetzt an $(\Phi \circ C)(\frac{\pi}{4})$.

Lösung.

(a, b, c) Es ist $\Phi_\varphi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi_z(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

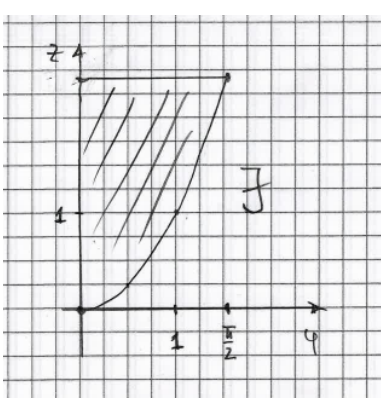
Also ist $\Phi_\varphi(\varphi, z) \times \Phi_z(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit ist $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{4}, 1) \times \Phi_z(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ist $(\Phi \circ C)(t) = \Phi(t, t^2) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$. Also ist $(\Phi \circ C)'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 2t \end{pmatrix}$.

Somit ist $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ \pi/2 \end{pmatrix}$.

Skizze von J:



Skizze von $\Phi(D)$, darin $\Phi(J)$ und die Vektoren $\Phi_\varphi(\varphi, z) \times \Phi_z(\varphi, z)$ und $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4})$: