Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 5

Hausaufgabe 13 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' \;=\; -\frac{y^3}{x^2+1}\;.$$

(a) Finden Sie alle konstanten Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; -\frac{y^3}{x^2+1}\;, \qquad y(1) = 1.$$

Lösung.

(a) Wir schreiben die rechte Seite der Differentialgleichung wie folgt.

$$y' \;=\; g(x)\cdot h(y) \;=\; -\frac{1}{x^2+1}\cdot y^3,$$

wobei $g(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ und $h(y) = y^3$.

Die Nullstellen von $h(y)$ sind die konstanten Lösungen. Also haben wir als einzige konstante Lösung $f(x) = 0$.

(b) Mit Trennung der Variablen: Da $x^2+1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist

$$(x^2+1)y' = -y^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{x^2+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\;.$$

Integration liefert

$$\frac{1}{2y^2} = -\int \frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

D.h. weitere Lösungen der DGL sind gegeben durch

$$f(x) = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2\arctan(x) + 2c}}\;.$$

Zusammen mit der konstanten Lösung $y(x) = 0$ aus Teilaufgabe (a) sind dies alle Lösungen der gegebenen DGL.

(c) Wir setzen die Anfangsbedingung $f(1) = 1 > 0$ in die Lösungen aus Teilaufgabe (b) ein und erhalten

$$1 \overset{!}{=} f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\arctan(1) + 2c}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2c}}.$$

Daraus folgt $\frac{\pi}{2} + 2c = 1$, also $c = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\arctan(x) + 1 - \frac{\pi}{2}}}.$$

Hausaufgabe 14 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) \;=\; 0 \,,$$

wobei $y \in (0, \pi)$.

(a) Sei $\arccos(x) := \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, definiert für $x \in [-1, +1]$.
Verifizieren Sie: Es ist $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ für $x \in \mathbb{R}$.
Verifizieren Sie: Es ist $\arccos(\cos(x)) = x$ für $x \in [0, \pi]$.
Skizzieren Sie den Graphen von $\arccos : [-1, +1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \arccos(x)$.

(b) Finden Sie alle konstanten Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

(c) Finden Sie alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) \;=\; 0 \,, \qquad y(0) \;=\; \frac{\pi}{4} \,.$$

Lösung.

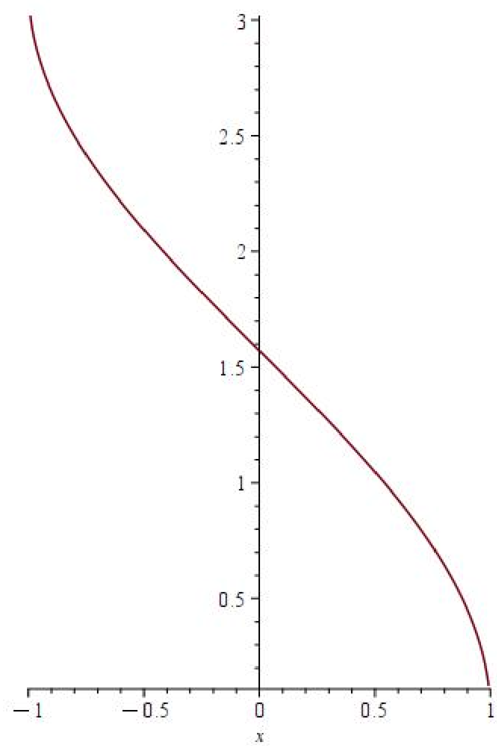
(a) Mit dem Additionstheorem wird

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \;=\; \sin(\tfrac{\pi}{2})\cos(-x) + \cos(\tfrac{\pi}{2})\sin(-x) \;=\; \cos(x) \,.$$

Damit sowie mit der Definition $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \arccos(\cos(x)) &= \arccos(\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)) \\ &= \tfrac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)) \\ &= \tfrac{\pi}{2} - \big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) \\ &= x \,. \end{aligned}$$

Graph von arccos:



(b) Wir schreiben die Differentialgleichung

$$y' \;=\; 2x \cdot \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \;.$$

Konstante Lösungen sind die Nullstellen von $\frac{\cos(y)}{\sin(y)}$, also die Nullstellen von $\cos(y)$. Da $y \in (0,\pi)$, ist $f(x) = \frac{\pi}{2}$ die einzige konstante Lösung dieser Differentialgleichung.

(c) Es ist

$$\sin(y) \cdot y' - 2x \cdot \cos(y) \;=\; 0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \cdot y' = 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\,\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x \;.$$

Integration liefert mittels $u = \cos(y),\ \mathrm{d}u = -\sin(y)\,\mathrm{d}y$, zunächst

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\,\mathrm{d}y \;=\; -\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \;=\; [-\ln(|u|)] \;=\; [-\ln(|\cos(y)|)]$$

Also wird

$$-\ln(|\cos(y)|) \;=\; \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\,\mathrm{d}y \;=\; \int 2x\,\mathrm{d}x \;=\; x^2 + c$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.
Auflösen nach y liefert

$$\cos(y) = \pm \mathrm{e}^{-x^2+c} \;,$$

Somit erhalten wir

$$f(x) = y = \arccos\big(\pm\,\mathrm{e}^{-x^2+c}\big) = \arccos\big(\pm\,\mathrm{e}^{c} \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\big) \;,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.
Zusammen mit der konstanten Lösung $y(x) = \frac{\pi}{2}$ aus Teilaufgabe (b) sind dies alle Lösungen der gegeben DGL.

(d) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = \pi/4$ liefert

$$\frac{\pi}{4} \stackrel{!}{=} f(0) = \arccos(\pm \mathrm{e}^{c})$$

und also

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4) = \pm \mathrm{e}^{c} \;.$$

Wir brauchen das positive Vorzeichen, erhalten $\mathrm{e}^{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und damit

$$f(x) = \arccos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

Hausaufgabe 15 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y\cos(x) + \sin(2x).$$

(a) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen von $y' = y\cos(x) + \sin(2x)$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y\cos(x) + \sin(2x) \quad \text{und} \quad y(\pi/2) = 0\,.$$

Lösung.

(a) Die zugehörige homogene Gleichung ist

$$y' - y\cos(x) = 0,$$

diese ist eine lineare DGL erster Ordnung. Aus der Vorlesung kennt man die allgemeine Lösung

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-G(x)}$$

einer solchen Gleichung. Hierbei ist

$$G(x) = \int (-\cos(x))\ \mathrm{d}x = -\sin(x).$$

Damit sind die Lösungen der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y(x) = k \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}$$

mit $k \in \mathbb{R}$.

(b) Um eine Partikulärlösung zu finden, verwenden wir Variation der Konstanten, d.h. wir setzen den Ansatz

$$f_{\mathrm{p}}(x) = k(x) \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}$$

in die DGL ein und erhalten mit

$$f_{\mathrm{p}}'(x) = k'(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} + k(x)\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$$

die Bedingung

$$k'(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} + k(x)\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} - k(x) \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \stackrel{!}{=} \sin(2x).$$

Daraus folgt

$$k'(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} = \sin(2x),$$

also

$$k'(x) = \sin(2x)\mathrm{e}^{-\sin(x)}\,.$$

Aufleiten gibt, unter Verwendung der Substitution $t = \sin(x),\ \mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}
[k(x)] &= \int \sin(2x)\mathrm{e}^{-\sin(x)}\ \mathrm{d}x \\
&= \int 2\sin(x)\cos(x)\mathrm{e}^{-\sin(x)}\ \mathrm{d}x \\
&= \textstyle\int 2t\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \\
&= [2t(-\mathrm{e}^{-t})] - \textstyle\int 2(-\mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{d}t \\
&= [2\mathrm{e}^{-t}(-t-1)] \\
&= [2\mathrm{e}^{-\sin(x)}(-\sin(x)-1)]
\end{aligned}$$

Damit wird

$$f_{\mathrm{p}}(x) \ = \ k(x) \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)} \ = \ 2(-\sin(x)-1)\ .$$

Jede Lösung der DGL ist also von der Form

$$f(x) \ = \ f_{\mathrm{p}}(x) + f_{\mathrm{h}}(x) \ = \ 2(-\sin(x)-1) + d\cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}\ ,$$

wobei $d \in \mathbb{R}$.

(Alternativ kann man zur Berechnung von $f_{\mathrm{p}}(x)$ auch die bereitgestellte Formel verwenden.)

(c) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(\pi/2) = 0$ liefert

$$0 \overset{!}{=} f(\pi/2) = 2(-\sin(\pi/2)-1) + d\cdot \mathrm{e}^{\sin(\pi/2)} \ = \ -4 + d\cdot \mathrm{e}^{1},$$

und also $d = 4\mathrm{e}^{-1}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$f(x) \ = \ 2(-\sin(x)-1) + 4\mathrm{e}^{-1}\cdot \mathrm{e}^{\sin(x)} \ = \ 2(-\sin(x)-1) + 4\mathrm{e}^{\sin(x)-1}\ .$$