Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 6

Hausaufgabe 16 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = x + 1$ Lösungen auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind.

(b) Finden sie zwei Lösungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ so, dass bei $x_0 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 1 & \qquad f_2(1) &= 0 \\ f_1'(1) &= 0 & \qquad f_2'(1) &= 1. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$ für g, h. Bestimmen Sie ihre Inverse $\mathrm{W}(1)^{-1}$.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit dem Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 2$.

Lösung.

(a) Einsetzen der Ableitungen von g und h

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{e}^x & \qquad g'(x) &= \mathrm{e}^x & \qquad g''(x) &= \mathrm{e}^x \\ h(x) &= x+1 & \qquad h'(x) &= 1 & \qquad h''(x) &= 0 \end{aligned}$$

in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} x\mathrm{e}^x - (x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 0 \quad \checkmark \\ 0 &\overset{!}{=} x \cdot 0 - (x+1) \cdot 1 + (x+1) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(b) Wir suchen Lösungen als Linearkombinationen von g und h: $f_1(x) = a_1 g(x) + b_1 h(x)$ und $f_2(x) = a_2 g(x) + b_2 h(x)$, wobei $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Mit den Bedingungen an f_1 müssen wir somit ein Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} f_1(1) = a_1\mathrm{e} + 2b_1 &= 1 \\ f_1'(1) = a_1\mathrm{e} + b_1 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a_1\mathrm{e} + 2b_1 &= 1 \\ b_1 &= 1 \end{aligned}$$

Somit ist $b_1 = 1$. Aus der ersten Gleichung folgt $a_1\mathrm{e} + 2 = 1$ und somit $a_1 = -\mathrm{e}^{-1}$.

Mit den Bedingungen an f_2 müssen wir somit ein weiteres Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} f_2(1) = a_2\mathrm{e} + 2b_2 &= 0 \\ f_2'(1) = a_2\mathrm{e} + b_2 &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a_2\mathrm{e} + 2b_2 &= 0 \\ b_2 &= -1 \end{aligned}$$

Somit ist $b_2 = -1$. Aus der ersten Gleichung folgt $a_2\mathrm{e} - 2 = 0$ und somit $a_2 = 2\mathrm{e}^{-1}$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1 g(x) + b_1 h(x) = -\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^x + (x+1) \\ f_2(x) &= a_2 g(x) + b_2 h(x) = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^x - (x+1) \end{aligned}$$

(c) Die Wronski-Matrix für g, h ist

$$\mathrm{W}(x_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_0} & x_0 + 1 \\ \mathrm{e}^{x_0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 2 \\ \mathrm{e} & 1 \end{pmatrix}$$

Invertieren mittels der Inversen-Regel für 2×2-Matrizen gibt

$$\mathrm{W}(x_0)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e} - 2\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\mathrm{e} & \mathrm{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e}^{-1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) Mit der Inversen der Wronski-Matrix aus (c) erhalten wir die Lösung

$$c_1 g(x) + c_2 h(x)$$

mit

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathrm{W}(x_0)^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e}^{-1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{-1} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir die Lösung

$$c_1 g(x) + c_2 h(x) \;=\; 3\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{x} - (x+1)$$

des Anfangswertproblems.

Alternativ kann man auch mithilfe von f_1 und f_2 aus (b) die Lösung

$$1 f_1(x) + 2 f_2(x) = -\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{x} + (x+1) + 4\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{x} - 2(x+1) = 3\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{x} - (x+1)$$

des Anfangswertproblems erhalten.

Hausaufgabe 17 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $h(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Berechnen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$ für g, h. Entscheiden Sie, ob g, h ein Fundamentalsystem ist.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit dem Anfangswerten $y(1) = 2$ und $y'(1) = 1$.

Lösung.

(a) Einsetzen der Ableitungen von g und h

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{e}^{2x} & g'(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} & g''(x) &= 4\mathrm{e}^{2x} \\ h(x) &= x\mathrm{e}^{2x} & h'(x) &= (2x+1)\mathrm{e}^{2x} & h''(x) &= 4(x+1)\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

in die Differentialgleichung ergibt

$$0 \overset{!}{=} 4\mathrm{e}^{2x} - 4 \cdot 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{2x} = 0 \quad \checkmark$$
$$0 \overset{!}{=} 4(x+1)\mathrm{e}^{2x} - 4(2x+1)\mathrm{e}^{2x} + 4x\mathrm{e}^{2x} = 0 \quad \checkmark$$

(b) Die Wronski-Matrix für g, h ist

$$\mathrm{W}(1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 2\mathrm{e}^2 & (2+1)\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Da $\det \mathrm{W}(1) = \mathrm{e}^4 \neq 0$ ist, ist g, h ein Fundamentalsystem.

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist dank (b) von der Form

$$c_1 g(x) + c_2 h(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x}$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$ und $c_2 \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten, der Lösungsraum ist gegeben durch

$$\{\, c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,\} \,.$$

(d) Die Inverse der Wronski-Matrix kann mittels der Inversen-Regel für 2×2-Matrizen berechnet werden. Damit erhält man

$$\mathrm{W}(1)^{-1} = \mathrm{e}^{-2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit den Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathrm{W}(1)^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-2} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Lösung für das Anfangswertproblem

$$c_1 g(x) + c_2 h(x) = 5\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{-2}x\mathrm{e}^{2x} = (5-3x)\mathrm{e}^{2x-2} \,.$$

Hausaufgabe 18 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 11y^{(1)} - 6y = 0$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$. Berechnen Sie $p(1)$. Berechnen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ und $y''(0) = 5$.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

mit $p(1) = 1-6+11-6 = 0$. Damit kennen wir auch schon die erste Nullstelle. Wir dividieren den zur Nullstelle 1 gehörigen Faktor $(X-1)$ aus dem charakteristischen Polynom heraus:

$$(X^3 - 6X^2 + 11X - 6) = (X-1)(X^2 - 5X + 6)$$

Davon berechnen wir nun die verbleibenden zwei Nullstellen mittels der Mitternachtsformel: $\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$. Dies liefert 2 und 3 als weitere Nullstellen.

Insgesamt ist also

$$p(X) \;=\; (X-1)(X-2)(X-3)\;.$$

(b) Da die Nullstellen aus (a) alle einfach sind und reell sind, erhalten wir als Fundamentalsystem daraus: e^x, e^{2x}, e^{3x}.

Die Wronski-Matrix ist

$$\mathrm{W}(x) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^{2x} & 3\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^x & 4\mathrm{e}^{2x} & 9\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}\;.$$

Die Wronski-Matrix an der Stelle 0 wird also

$$\mathrm{W}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\;.$$

(c) Lösungen der Differentialgleichung sind Linearkombination des Fundamentalsystems. Somit ist jede Lösungen von der Form

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}\;,$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d) Um passende Koeffizienten zu den Anfangswerten zu finden, lösen wir das Gleichungssystem

$$\mathrm{W}(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die Wronski-Matrix für das Fundamentalsystem aus (b) ist

$$\mathrm{W}(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^0 & \mathrm{e}^0 & \mathrm{e}^0 \\ \mathrm{e}^0 & 2\mathrm{e}^0 & 3\mathrm{e}^0 \\ \mathrm{e}^0 & 4\mathrm{e}^0 & 9\mathrm{e}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Damit lösen wir nun das Gleichungssystem mit den Anfangswerten als rechter Seite:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Somit ist $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{2}$. Die Lösung für das Anfangswertproblem ist also

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^x + 0\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x} \; = \; \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x} \; .$$