

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 7

Hausaufgabe 19 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 12y^{(1)} - 8y^{(0)} = 0$$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Berechnen Sie $p(2)$. Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Linearfaktoren.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 2$.

Lösung.

- Das charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8.$$

Einsetzen von $X = 2$ ergibt $p(2) = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$. Folglich ist $X = 2$ eine Nullstelle.

Um die weiteren Nullstellen zu finden, dividieren wir zuerst die bekannte Nullstelle aus dem charakteristischen Polynom raus:

$$(X^3 - 6X^2 + 12X - 8) = (X - 2)(X^2 - 4X + 4)$$

Das verbleibende Polynom ist von zweiter Ordnung und die weiteren Nullstellen können mittels der Mitternachtsformel bestimmt werden. Dies liefert die doppelte Nullstelle $X = 2$.

Zusammen mit der ersten Nullstelle hat das charakteristische Polynom somit eine dreifache Nullstelle $X = 2$. Damit können wir das charakteristische Polynom als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$p(X) = (X - 2)^3$$

- Mit den Nullstellen und deren Vielfachheit kann direkt ein Fundamentalsystem bestimmt werden: e^{2x} , xe^{2x} , x^2e^{2x} .
- Für die Lösung machen wir den Ansatz $f(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x}$. Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} (e^{2x})' &= 2e^{2x} & (e^{2x})'' &= 4e^{2x} \\ (xe^{2x})' &= (2x + 1)e^{2x} & (xe^{2x})'' &= 4(x + 1)e^{2x} \\ (x^2e^{2x})' &= 2(x^2 + x)e^{2x} & (x^2e^{2x})'' &= 2(2x^2 + 4x + 1)e^{2x} \end{aligned}$$

und den Anfangswerten erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f'(1) \\ f''(1) \end{pmatrix} = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Um die Koeffizienten für die Lösung des Anfangswertproblems zu bestimmen muss das Gleichungssystem gelöst werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 2e^{-2} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 2e^{-2} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2e^{-2} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e^{-2} \\ 0 & 1 & 0 & -2e^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & e^{-2} \end{array} \right)$$

Also ist $c_1 = e^{-2}$, $c_2 = -2e^{-2}$, $c_3 = e^{-2}$.

Somit löst

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2} \cdot e^{2x} - 2e^{-2} \cdot xe^{2x} + e^{-2} \cdot x^2e^{2x} \\ &= (1 - 2x + x^2)e^{2x-2} \end{aligned}$$

das Anfangswertproblem.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 20 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y^{(2)} - 8y^{(1)} + 4y^{(0)} = 0$$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Bestimmen Sie $p(1+i)$. Bestimmen Sie $p(1-i)$. Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Linearfaktoren.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y^{(2)} - 8y^{(1)} + 4y^{(0)} = 4x - 8.$$

Lösung.

- Das charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4 = 0.$$

Einsetzen von $X = 1 + i$ ergibt $p(1 + i) = -4 - 4(-2 + 2i) + 8(2i) - 8(1 + i) + 4 = 0$. Folglich ist $X = 1 + i$ eine Nullstelle. Da die Nullstellen komplex konjugierte Paare bilden ist $p(1 - i) = 0$ und $X = 1 - i$ ebenfalls eine Nullstelle.

Um $p(X)$ in Linearfaktoren zu zerlegen brauchen wir alle Nullstellen von $p(X)$. Um die weiteren Nullstellen zu finden, dividieren wir Nullstellen ab. Es ist

$$(X - (1 + i))(X - (1 - i)) = X^2 - 2X + 2,$$

und wir können wir direkt durch das Produkt der Linearfaktoren zu den beiden Nullstellen dividieren:

$$(X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 2X + 2).$$

Die Nullstellen von dem verbleibenden Polynom zweiter Ordnung sind $X = 1 + i$ und $X = 1 - i$. Die Faktorisierung haben wir bereits berechnet.

Die Nullstellen von $p(X)$ sind somit das komplex konjugierte Paar $X = 1+i$ und $X = 1-i$, wobei jede Nullstelle doppelt vorkommt. Damit können wir das charakteristische Polynom als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$p(X) = (X - (1 + i))^2(X - (1 - i))^2$$

- Mit den Nullstellen und deren Vielfachheit kann direkt ein Fundamentalsystem bestimmt werden: $e^x \sin(x)$, $e^x \cos(x)$, $xe^x \sin(x)$, $xe^x \cos(x)$.
- Wir bestimmen zunächst eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz nach Art der rechten Seite. Die rechte Seite ist $4x - 8 = (4x - 8)e^{0x}$. Da $p(0) \neq 0$ ist, liegt kein Resonanzfall vor.

Wir machen den Ansatz $f_p(x) = (ax + b)e^{0x} = ax + b$ und bestimmen die Koeffizienten durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung:

$$0 + 0 + 0 - 8a + 4(ax + b) = 4ax + (4b - 8a) \stackrel{!}{=} 4x - 8$$

Somit ist $a = 1$, $b = 0$ und damit $f_p(x) = x$.

Die Lösungen der Differentialgleichung sind daher

$$x + c_1 e^x \sin(x) + c_2 e^x \cos(x) + c_3 x e^x \sin(x) + c_4 x e^x \cos(x)$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 21 Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \ln(x)$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$.

- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $g(x) = x^\alpha$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung?
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'' - \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \ln(x) \quad \text{und} \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$$

Lösung.

- Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(\alpha - 1)\alpha x^{\alpha-2} - \frac{1}{x}\alpha x^{\alpha-1} - \frac{1}{x^2}x^\alpha = (\alpha - 1)\alpha x^{\alpha-2} - \alpha x^{\alpha-2} - x^{\alpha-2} = (\alpha^2 - 2\alpha - 1)x^{\alpha-2} \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir erhalten $\alpha = 1 \pm \sqrt{1^2 + 1}$, also $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ oder $\alpha = 1 - \sqrt{2}$.

- Mit den Lösungen aus (a) setzen wir an: $f_1(x) = x^{1+\sqrt{2}}$, $f_2(x) = x^{1-\sqrt{2}}$.

Die Wronski-Matrix wird

$$W(x) = \begin{pmatrix} x^{1+\sqrt{2}} & x^{1-\sqrt{2}} \\ (1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$W(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Da $\det W(1) = -2\sqrt{2} \neq 0$, liegt mit $f_1(x)$, $f_2(x)$ ein Fundamentalsystem vor.

- Wir verwenden Variation der Konstanten und setzen an: $f_p(x) = c_1(x)x^{1+\sqrt{2}} + c_2(x)x^{1-\sqrt{2}}$. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x^{1+\sqrt{2}} & x^{1-\sqrt{2}} \\ (1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x) \end{pmatrix}$$

Die Matrix-Inversen-Formel gibt

$$W(x)^{-1} = -\frac{1}{2x\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} & -x^{1-\sqrt{2}} \\ -(1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & x^{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Also wird

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2x\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}} & -x^{1-\sqrt{2}} \\ -(1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} & x^{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^{-\sqrt{2}} \ln(x) \\ -x^{\sqrt{2}} \ln(x) \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten integrieren wir mittels partieller Integration. Mit

$$\begin{aligned}\int x^a \ln(x) &= \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \ln(x) \right] - \int \frac{1}{a+1} x^{a+1} \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \ln(x) \right] - \frac{1}{a+1} \int x^a dx \\ &= \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \ln(x) - \frac{1}{(a+1)^2} x^{a+1} \right]\end{aligned}$$

für $a \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}c_1(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-\sqrt{2}} x^{1-\sqrt{2}} \ln(x) - \frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} x^{1-\sqrt{2}} \right) \\ c_2(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} x^{1+\sqrt{2}} \ln(x) - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} x^{1+\sqrt{2}} \right).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}f_p(x) &= c_1(x)x^{1+\sqrt{2}} + c_2(x)x^{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-\sqrt{2}} x^2 \ln(x) - \frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} x^2 \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} x^2 \ln(x) - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} x^2 \right) \\ &= -x^2 \ln(x) - 2x^2\end{aligned}$$

eine partikuläre Lösung.

- (d) Mit dem Fundamentalsystem sind alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$f(x) = -x^2 \ln(x) - 2x^2 + a_1 x^{1+\sqrt{2}} + a_2 x^{1-\sqrt{2}}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Mit den Anfangswerten und der Ableitung

$$f'(x) = -x - 2x \ln(x) - 4x + a_1(1 + \sqrt{2})x^{\sqrt{2}} + a_2(1 - \sqrt{2})x^{-\sqrt{2}}.$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}f(1) &= a_1 + a_2 - 0 - 2 &= a_1 + a_2 - 2 &\stackrel{!}{=} 0 \\ f'(1) &= (1 + \sqrt{2})a_1 + (1 - \sqrt{2})a_2 - 1 - 4 = (1 + \sqrt{2})a_1 + (1 - \sqrt{2})a_2 - 5 &\stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Die Differenz dieser Gleichungen liefert $\sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}a_2 \stackrel{!}{=} 3$, also $a_1 - a_2 \stackrel{!}{=} \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Die Summe der nun entstandenen Gleichungen gibt $2a_1 = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Das führt auf $a_1 = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$ und $a_2 = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Somit löst

$$f(x) = -x^2 \ln(x) - 2x^2 + \left(1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)x^{1+\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)x^{1-\sqrt{2}}$$

das Anfangswertproblem.