Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 8

Hausaufgabe 22 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$(*) \qquad y'' + 2y' + 2y \;=\; \mathrm{e}^{-x}\sin(x) + x^2\cos(x)$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ und ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie partikuläre Lösungen von $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$
und von $y'' + 2y' + 2y = x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $(*)$ unter Verwendung von (b).
Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen von $(*)$.

Lösung.

(a) Die zu $(*)$ gehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(X) = X^2 + 2X + 2 = (X+1)^2 + 1 = (X+1-\mathrm{i})(X+1+\mathrm{i}).$$

Das Polynom hat die echt komplexen Nullstellen $-1+\mathrm{i}$ und $-1-\mathrm{i}$. Also erhalten wir das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x), \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,.$$

(b) *Erstens.* Wir beginnen zunächst mit der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}.$$

Wir schreiben die rechte Seite als

$$\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} =: r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$$

mit $r(x) = 1$ und $\mu = -1+\mathrm{i}$.

Wir haben $d = 0$, da $r(x) = 1$ ein Polynom von Grad 0 ist.

Zudem stellen wir fest, dass $\mu = -1+\mathrm{i}$ eine einfache Nullstelle von $p(x)$ ist. Also befinden wir uns im Resonanzfall mit $m = 1$, und die gesuchte partikuläre Lösung hat die Form $f_\mathrm{p}(x) = s(x)\cdot x^1\cdot \mathrm{e}^{\mu x}$, wobei $s(x)$ ein Polynom von Grad 0 ist.

Mit anderen Worten, die gesuchte partikuläre Lösung hat die Form $f_\mathrm{p}(x) = Cx\cdot\mathrm{e}^{\mu x}$ für ein $C \in \mathbb{C}$.

Es ist

$$\begin{aligned} p(X+\mu) &= (X-1+\mathrm{i})^2 + 2(X-1+\mathrm{i}) + 2 \\ &= X^2 - 2X + 2\mathrm{i}X + 1 - 2\mathrm{i} - 1 + 2X - 2 + 2\mathrm{i} + 2 \\ &= X^2 + 2\mathrm{i}X \,. \end{aligned}$$

Also muß

$$p(\mathrm{D}+\mu)(Cx) \;=\; (\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{i}\mathrm{D})(Cx) \;=\; 2\mathrm{i}C \;\stackrel{!}{=}\; 1 \;=\; r(x)$$

sein. Wir erhalten $C = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Demnach ist eine partikuläre Lösung zu $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$ gegeben durch

$$\tilde{f}_{\mathrm{p},1}(x) = -\tfrac{\mathrm{i}}{2} x \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} \,.$$

Zweitens. Nun betrachten wir die zweite Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

Wir schreiben die rechte Seite als

$$x^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} =: q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

mit $r(x) = x^2$ und $\mu = \mathrm{i}$.

Wir haben $d = 2$, da $r(x) = x^2$ ein Polynom von Grad 2 ist.

Es hat $p(X)$ nur die Nullstellen $-1+\mathrm{i}$ und $-1-\mathrm{i}$. Also ist $p(\mathrm{i}) \neq 0$. Somit liegt nicht der Resonanzfall vor.

Unsere partikuläre Lösung hat also die Form

$$g_{\mathrm{p}}(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

mit a, b, $c \in \mathbb{C}$.

Es ist $p(X+\mu) = p(X+\mathrm{i}) = (X+\mathrm{i})^2 + 2(X+\mathrm{i}) + 2 = X^2 + (2+2\mathrm{i})X + 1 + 2\mathrm{i}$.

Somit sollte sein:

$$\begin{aligned} & p(\mathrm{D}+\mathrm{i})(ax^2+bx+c) \\ & = (\mathrm{D}^2 + (2+2\mathrm{i})\mathrm{D} + 1 + 2\mathrm{i})(ax^2+bx+c) \\ & = (ax^2+bx+c)'' + (2+2\mathrm{i}) \cdot (ax^2+bx+c)' + (1+2\mathrm{i})(ax^2+bx+c) \\ & = 2a + (2+2\mathrm{i})(2ax+b) + (1+2\mathrm{i}) \cdot (ax^2+bx+c) \\ & = (1+2\mathrm{i})ax^2 + ((4+4\mathrm{i})a + (1+2\mathrm{i})b))x + (2a + (2+2\mathrm{i})b + (1+2\mathrm{i})c) \\ & \stackrel{!}{=} x^2 \;=\; r(x) \,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefertdas lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= (2\mathrm{i}+1)a \\ 0 &= (4+4\mathrm{i})a + (1+2\mathrm{i})b \\ 0 &= 2a + (2+2\mathrm{i})b + (1+2\mathrm{i})c \,. \end{aligned}$$

Die Lösung wird

$$a = \frac{1}{1+2\mathrm{i}} = \frac{1-2\mathrm{i}}{5},$$

$$b = -\frac{4+4\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}a = -\frac{(4+4\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5} \cdot \frac{1-2\mathrm{i}}{5} = \frac{4(7\mathrm{i}-1)}{25}$$

und

$$c = -\frac{2}{1+2\mathrm{i}}a - \frac{2+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}b = -\frac{2(1-2\mathrm{i})}{5} \cdot \frac{1-2\mathrm{i}}{5} - \frac{(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5} \cdot \frac{4(7\mathrm{i}-1)}{25} = \frac{-2-136\mathrm{i}}{125} .$$

Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$\tilde{f}_{\mathrm{p},2}(x) = \left(\frac{1-2\mathrm{i}}{5}x^2 + \frac{4(7\mathrm{i}-1)}{25}x - \frac{2+136\mathrm{i}}{125}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

(c) Wir betrachten die rechten Seiten der Differentialgleichungen aus (b).

Wir haben

$$\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-x}\sin(x) .$$

Also ist

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x) .$$

Wir haben

$$x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = x^2\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) = x^2\cos(x) + \mathrm{i}x^2\sin(x) .$$

Also ist

$$\mathrm{Re}\left(x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = x^2\cos(x) .$$

Wir stellen zudem fest, dass die rechte Seite von $(*)$ sich schreiben lässt als

$$\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + x^2\cos(x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\right) + \mathrm{Re}\left(x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) .$$

Somit ist eine partikuläre Lösung von $(*)$ gegeben durch

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \mathrm{Im}\left(\tilde{f}_{\mathrm{p},1}(x)\right) + \mathrm{Re}\left(\tilde{f}_{\mathrm{p},2}(x)\right) ,$$

wobei $\tilde{f}_{\mathrm{p},1}(x)$ und $\tilde{f}_{\mathrm{p},2}(x)$ die partikulären Lösungen aus (b) sind.

Wir berechnen $\mathrm{Im}\left(\tilde{f}_{\mathrm{p},1}(x)\right)$. Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\mathrm{p},1}(x) &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2} \cdot x \cdot \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\\ &= \tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}\sin(x) - \tfrac{\mathrm{i}}{2}x\mathrm{e}^{-x}\cos(x).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Im}\left(\tilde{f}_{\mathrm{p},1}(x)\right) = -\tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}\cos(x) .$$

Wir berechnen $\mathrm{Re}\left(\tilde{f}_{\mathrm{p},2}(x)\right)$. Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\mathrm{p},2}(x) &= \left(\tfrac{1-2\mathrm{i}}{5}x^2 + \tfrac{4(7\mathrm{i}-1)}{25}x - \tfrac{2+136\mathrm{i}}{125}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\\ &= \left(\tfrac{1-2\mathrm{i}}{5}x^2 + \tfrac{4(7\mathrm{i}-1)}{25}x - \tfrac{2+136\mathrm{i}}{125}\right)\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)\\ &= \left(\tfrac{x^2}{5}(2\sin(x) + \cos(x)) - \tfrac{x}{25}(28\sin(x) + 4\cos(x)) + \tfrac{1}{125}(136\sin(x) - 2\cos(x))\right)\\ &\quad +\mathrm{i}\left(\tfrac{x^2}{5}(\sin(x) - 2\cos(x)) + \tfrac{4x}{25}(7\cos(x) - \sin(x)) - \tfrac{1}{125}(136\cos(x) + 2\sin(x))\right) .\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Re}\Big(\tilde{f}_{\mathrm{p},2}(x)\Big) = \tfrac{x^2}{5}(2\sin(x)+\cos(x)) - \tfrac{x}{25}(28\sin(x)+4\cos(x)) + \tfrac{1}{125}(136\sin(x)-2\cos(x))\,.$$

Also ist ingesamt

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{p}}(x) &= \mathrm{Im}(f_{\mathrm{p}}(x)) + \mathrm{Re}(g_{\mathrm{p}}(x)) \\ &= -\tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\ &\quad +\tfrac{x^2}{5}(2\sin(x)+\cos(x)) - \tfrac{x}{25}(28\sin(x)+4\cos(x)) + \tfrac{1}{125}(136\sin(x)-2\cos(x))\,. \end{aligned}$$

Aus (a) kennen wir das Fundamentalsystem f_1 , f_2 von der zu $(*)$ gehörigen homogenen Differentialgleichung.

Damit ist die Menge aller Lösungen von $(*)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &\{\, c_1\, f_1(x) + c_2\, f_2(x) + f_{\mathrm{p}}(x) \;:\; c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} \,\} \\ = \; &\{c_1\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin(x) - \tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\ &\quad +\tfrac{x^2}{5}(2\sin(x)+\cos(x)) - \tfrac{x}{25}(28\sin(x)+4\cos(x)) + \tfrac{1}{125}(136\sin(x)-2\cos(x)) \;:\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,\}\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

(a) $\mathcal{L}((3t+1)^2 \mathrm{e}^{2t})$

(b) $\mathcal{L}(\mathrm{e}^t \cosh(t)\cos(t))$

(c) $\mathcal{L}(f(t))$, wobei $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leqslant t \end{array} \right\}$ und wobei $s > 0$.

(d) $\mathcal{L}(t^2 \cos(t - \frac{\pi}{4}))$

Lösung.

(a) Wir verwenden die Transformationsregel $\mathcal{L}(t^n \mathrm{e}^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ und die Linearität der Laplace-Transformation. Damit wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((3t+1)^2 \mathrm{e}^{2t}) &= \mathcal{L}\left((1+6t+9t^2)\mathrm{e}^{2t}\right) \\ &= \mathcal{L}(\mathrm{e}^{2t}) + 6\mathcal{L}(t\mathrm{e}^{2t}) + 9\mathcal{L}(t^2\mathrm{e}^{2t}) \\ &= \tfrac{1}{s-2} + \tfrac{6}{(s-2)^2} + \tfrac{18}{(s-2)^3}\,. \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\mathrm{e}^t \cosh(t)\cos(t) = \mathrm{e}^t \cdot \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})\cos(t) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}+1)\cos(t)\,.$$

Wir verwenden $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, die Dämpfungsregel $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}f(t)) = F(s-a)$ und die Linearität der Laplace-Transformation.

Es wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathrm{e}^t \cosh(t)\cos(t)) &= \mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}+1)\cos(t)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}(\mathrm{e}^{2t}\cos(t)) + \mathcal{L}(\cos(t))) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{s-2}{(s-2)^2+1} + \tfrac{s}{s^2+1}\right)\,. \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen $\mathcal{L}(f(t))$ direkt über die Definition der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Wir zerlegen den Definitionsbereich $[0,+\infty) = [0,1] \cup (1,+\infty)$ und nutzen die Additivität des Integrals aus. Damit ergibt sich

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_1^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 0\ \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}_{=0} + \underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}_{=:I}\,.$$

Für $s > 0$ wird

$$I = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_1^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-s\beta}}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\,.$$

Insgesamt haben wir

$$\mathcal{L}(f(t)) = 0 + I = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

für $s > 0$.

(d) Es ist

$$\cos(t - \tfrac{\pi}{4}) \;=\; \cos(t)\cos(-\tfrac{\pi}{4}) - \sin(t)\sin(-\tfrac{\pi}{4}) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) + \sin(t))\ .$$

Wir verwenden

$$\mathcal{L}(t^2 f(t)) \;=\; F''(s)$$

und

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\cos(t)) & = & \frac{s}{s^2+1} \\ \mathcal{L}(\sin(t)) & = & \frac{1}{s^2+1}\ . \end{array}$$

Es wird

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}(t^2\cos(t - \frac{\pi}{4})) & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{L}(t^2\cos(t)) + \mathcal{L}(t^2\sin(t))) \\
& = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{1}{s^2+1}\big) \\
& = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1\cdot(s^2+1)-s\cdot 2s}{(s^2+1)^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\big) \\
& = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{2s}{(s^2+1)^2}\big) \\
& = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{(-2s)\cdot(s^2+1)^2-(1-s^2)\cdot 2(s^2+1)\cdot 2s}{(s^2+1)^4} - \frac{2\cdot(s^2+1)^2-2s\cdot 2(s^2+1)\cdot 2s}{(s^2+1)^4}\big) \\
& = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{(-2s)\cdot(s^2+1)-(1-s^2)\cdot 2\cdot 2s}{(s^2+1)^3} - \frac{2\cdot(s^2+1)-2s\cdot 2\cdot 2s}{(s^2+1)^3}\big) \\
& = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{-2s^3-2s-4s+4s^3}{(s^2+1)^3} - \frac{2s^2+2-8s^2}{(s^2+1)^3}\big) \\
& = & \frac{2s^3+6s^2-6s-2}{\sqrt{2}(s^2+1)^3} \\
& = & \frac{\sqrt{2}(s^3+3s^2-3s-1)}{(s^2+1)^3}\ .
\end{array}$$

Hausaufgabe 24

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y \;=\; \mathrm{e}^t,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstehenden Gleichung an.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstehenden Ausdruck an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

Lösung.

(a) Da $f(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, gilt

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) \;=\; \mathrm{e}^t\;.$$

Da $f(t)$ auch die Anfangsbedingungen erfüllt, ist zudem $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1$.

Laplace-Transformation auf beiden Seiten liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} s^2F(s) - sf(0) - f'(0) - 3sF(s) + 3f(0) + 2F(s) \;&=\; \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &=\; \frac{1}{s-1}\;, \end{aligned}$$

wegen der Anfangsbedingungen also

$$s^2F(s) - 3sF(s) + 2F(s) \;=\; \frac{1}{s-1} + s - 2.$$

(b) Wir bestimmen $F(s)$:

$$\begin{aligned} s^2F(s) - 3sF(s) + 2F(s) &= \frac{1}{s-1} + s - 2 \\ F(s)(s^2 - 3s + 2) &= \frac{1}{s-1} + s - 2 \\ F(s)(s-1)(s-2) &= \frac{1}{s-1} + s - 2 \\ F(s) &= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} + \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Der zweite Bruch liegt bereits in einer für die inverse Laplace-Transformation geeigneten Form vor. Auf den ersten Bruch wenden wir Partialbruchzerlegung an.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-2} \\ &= \frac{A(s-1)(s-2) + B(s-2) + C(s-1)^2}{(s-1)^2(s-2)} \\ &= \frac{As^2 - 3As + 2A + Bs - 2B + Cs^2 - 2Cs + C}{(s-1)^2(s-2)},\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -3A + B - 2C &= 0 \\ 2A - 2B + C &= 1 \end{aligned}$$

Wir formen um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Also ist $A = -1$, $B = -1$ und $C = 1$.

Damit wird

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-1}{(s-1)} + \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-1)} \\ &= -\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-2)}. \end{aligned}$$

(c) Wir können nun $f(t)$ über die inverse Laplace-Transformation bestimmen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{(s-1)^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{(s-2)}\right) \\ &= -\mathrm{e}^t t + \mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$