Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 9

Hausaufgabe 25

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'' + 2y' + 5y \;=\; 4\mathrm{e}^{-t} =: g(t)$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ von $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Führen Sie für $p(X)$ eine quadratische Ergänzung durch.

Sei $u(t)$ die Lösung von $y'' + 2y' + 5y = 0$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

Berechnen Sie $u(t)$ als inverse Laplace-Transformierte von $U(s) = \frac{1}{p(s)}$.

(b) Wir suchen die Lösung $f(t)$ des Anfangswertproblems $y'' + 2y' + 5y \;=\; 4\mathrm{e}^{-t}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$. Berechnen Sie hierzu $f(t) = (u * g)(t)$.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen in die Differentialgleichung und in die Anfangsbedingungen.

Lösung.

(a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom der Differentialgleichung und ergänzen es quadratisch.

$$p(X) \;=\; X^2 + 2X + 5 \;=\; (X+1)^2 + 4$$

Mit

$$U(s) \;=\; \frac{1}{p(s)} \;=\; \frac{1}{(s+1)^2+4} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

wird

$$u(t) \;=\; \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right) \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\ .$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} f(t) \;&=\; (u * g)(t) \\ &=\; (g * u)(t) \\ &=\; \textstyle\int_0^t 4\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\tau}\sin(2\tau)\mathrm{d}\tau \\ &=\; 2\mathrm{e}^{-t}\textstyle\int_0^t \sin(2\tau)\mathrm{d}\tau \\ &=\; 2\mathrm{e}^{-t}[-\frac{1}{2}\cos(2\tau)]_0^t \\ &=\; \mathrm{e}^{-t}(1-\cos(2t))\ . \end{aligned}$$

Wir machen nun eine Probe. Es ist

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\cos(2t) \\ f'(t) &= -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\cos(2t) + 2\mathrm{e}^{-t}\sin(2t) \\ f''(t) &= \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\cos(2t) - 2\mathrm{e}^{-t}\sin(2t) - 2\mathrm{e}^{-t}\sin(2t) + 4\mathrm{e}^{-t}\cos(2t) \\ &= \mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-t}\cos(2t) - 4\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\ . \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
f''(t) + 2f'(t) + 4f(t) &= (\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-t}\cos(2t) - 4\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)) \\
&\quad +2(-\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\cos(2t) + 2\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)) \\
&\quad +5(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)) \\
&= (1-2+5)\mathrm{e}^{-t} + (3+2-5)\mathrm{e}^{-t}\cos(2t) + (-4+4)\mathrm{e}^{-t}\sin(2t) \\
&= 4\mathrm{e}^{-t}\,.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$f(0) \;=\; \mathrm{e}^{-0}(1-\cos(2\cdot 0)) \;=\; 1\cdot(1-1) \;=\; 0$$

und

$$f'(0) \;=\; -\mathrm{e}^{-0} + \mathrm{e}^{-0}\cos(2\cdot 0) + 2\mathrm{e}^{-0}\sin(2\cdot 0) \;=\; -1+1+0 \;=\; 0\,.$$

Hausaufgabe 26 Wir betrachten die Differentialgleichung $z'' + 6z' + 10z = 0$.

(a) Formen Sie die Differentialgleichung in eine vektorwertige Differentialgleichung erster Ordnung um. Verwenden Sie dazu die Substitution $y_1 = z$, $y_2 = z'$ und finden Sie eine Matrix A, für welche sich folgende vektorwertige Differentialgleichung ergibt.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen zu $z'' + 6z' + 10z = 0$ unter Verwendung von (b).

Lösung.

(a) Mit der Substitution $y_1 = z$ und $y_2 = z'$ haben wir $y_1' = z' = y_2$ und

$$y_2' = z'' = -6z' - 10z = -6y_2 - 10y_1 .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

(b) Wir bestimmen die Eigenwerte von A. Es ist

$$\det(A - \lambda \mathrm{E}_2) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -10 & -6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-6-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0 .$$

Somit wird $\lambda = -3 \pm \sqrt{9 - 10} = -3 \pm \mathrm{i}$.

Zum Eigenwert $\lambda = -3 + \mathrm{i}$ berechnen wir einen Eigenvektor:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0-(-3+\mathrm{i}) & 1 & 0 \\ -10 & -6-(-3+\mathrm{i}) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3-\mathrm{i} & 1 & 0 \\ -10 & -3-\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3-\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Folglich ist $\binom{1}{-3+\mathrm{i}} = \binom{1}{-3} + \mathrm{i}\binom{0}{1}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-3 + \mathrm{i}$.

Dies liefert mit 6.1.6 die linear unabhängigen Lösungen

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{-3x}\left(\cos(x)\binom{1}{-3} - \sin(x)\binom{0}{1}\right) = \mathrm{e}^{-3x}\binom{\cos(x)}{-3\cos(x)-\sin(x)}$$

und

$$f_{[2]}(x) = \mathrm{e}^{-3x}\left(\sin(x)\binom{1}{-3} + \cos(x)\binom{0}{1}\right) = \mathrm{e}^{-3x}\binom{\sin(x)}{-3\sin(x)+\cos(x)}$$

Da der Lösungsraum die Dimension 2 hat, ist $f_{[1]}(x)$, $f_{[2]}(x)$ bereits ein Fundamentalsystem. Wir haben also das Fundamentalsystem

$$\mathrm{e}^{-3x}\binom{\cos(x)}{-3\cos(x)-\sin(x)} , \ \mathrm{e}^{-3x}\binom{\sin(x)}{-3\sin(x)+\cos(x)} .$$

(c) Da jede Lösung zu $y' = Ay$ gemäß (b) von der Form

$$\binom{z}{z'} = \binom{y_1}{y_2} = c_1 \mathrm{e}^{-3x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -3\cos(x)-\sin(x) \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-3x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -3\sin(x)+\cos(x) \end{pmatrix}$$

ist, ist jede Lösung zur dazu äquivalenten Differentialgleichung $z'' + 6z' + 10z = 0$ von der Form

$$z = c_1 \mathrm{e}^{-3x} \cos(x) + c_2 \mathrm{e}^{-3x} \sin(x) ,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 27 Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Es ist 2 ein Eigenwert von A. Sei $B := A - 2\mathrm{E}_3$. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie das minimale $k \geqslant 0$ mit $B^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Erstellen Sie damit $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$. Berechnen Sie $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Sei $b(x) := \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y' = Ay + b(x)$.

Lösung.

(a) Es ist $B = A - 2\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Es wird
$$Bv \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es wird
$$B^2 v \;=\; B(Bv) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Somit ist $k = 2$.

(b) Wir bestimmen die Eigenwerte von A. Es wird

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{E}_3) \;&=\; \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \;&=\; (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &=\; (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) \;&=\; (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &=\; -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 . \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, wie auch aus (a) bekannt, und $\lambda_2 = 1$.

Mittels (a) und 6.1.10 erhalten wir ausgehend von $\lambda_1 = 2$ die Lösungen

$$\begin{aligned} f_{[1]}(x) \;&=\; \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\big(\tfrac{x^0}{0!} B^{k-1} v\big) \;&\overset{\text{(a)}}{=}\; \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_{[2]}(x) \;&=\; \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\big(\tfrac{x^1}{1!} B^{k-1} v + \tfrac{x^0}{0!} B^{k-2} v\big) \;&\overset{\text{(a)}}{=}\; \mathrm{e}^{2x}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) \;=\; \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} x+1 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ bestimmen wir einen Eigenvektor. Wir formen das zugehörige lineare Gleichungssysstem um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$. Das liefert die Lösung

$$f_{[3]}(x) \;=\; \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit $f_{[1]}(x)$, $f_{[2]}(x)$, $f_{[3]}(x)$ ein Fundamentalsystem ist, sollte noch die zugehörige Wronskimatrix

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x}(x+1) & 0 \\ -\mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{2x}x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ invertierbar sein. Es wird

$$\det \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) \;=\; \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; 1 \;\neq 0\,.$$

Also ist in der Tat

$$\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\; \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} x+1 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix},\; \mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

Wir wollen $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} = \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(-x) \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}$ berechnen.

Zunächst berechnen wir $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist also $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Damit wird

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} &= \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(-x) \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x}(-x+1) & 0 \\ -\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x}x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x}(-x+1) & -x\mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2x}x & \mathrm{e}^{-2x}(1+x) & 0 \\ \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2x}x & -\mathrm{e}^{-2x}(1+x) & 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Wir haben

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} b(x) \;=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2x}x & -\mathrm{e}^{-2x}(1+x) & 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -4x^2\mathrm{e}^{-2x} \\ 4x\mathrm{e}^{-2x} \\ -4x\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} [c_1(x)] &= \int -4x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= [-4x^2\tfrac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}] - \int -8x\tfrac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= [2x^2\mathrm{e}^{-2x}] - \int 4x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= [2x^2\mathrm{e}^{-2x}] - [4x\tfrac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}] + \int 4\tfrac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= [2x^2\mathrm{e}^{-2x}] + [2x\mathrm{e}^{-2x}] - \int 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= [(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-2x}]\,. \end{aligned}$$

Wir wählen $c_1(x) = (2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} [c_2(x)] & = & \int 4x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [4x\frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}] - \int 4\frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [-2x\mathrm{e}^{-2x}] + \int 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [(-1-2x)\mathrm{e}^{-2x}]\;. \end{array}$$

Wir wählen $c_2(x) = (-1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$.

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} [c_3(x)] & = & \int -4x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [-4x\frac{1}{-1}\mathrm{e}^{-x}] - \int -4\frac{1}{-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [4x\mathrm{e}^{-x}] - \int 4\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [4(x+1)\mathrm{e}^{-x}]\;. \end{array}$$

Wir wählen $c_1(x) = 4(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

Damit wird

$$c(x) \;=\; \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-2x} \\ (-1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \\ 4(x+1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}\;.$$

Als partikuläre Lösung von $y' = Ay + b(x)$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} f_\mathrm{p}(x) & = & \mathrm{W}_\mathrm{sys}(x)\cdot c(x) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x}(x+1) & 0 \\ -\mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{2x}x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-2x} \\ (-1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \\ 4(x+1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} (2x^2+2x+1)+(x+1)(-1-2x) \\ -(2x^2+2x+1)-x(-1-2x) \\ (-1-2x)+4(x+1) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -x \\ -x-1 \\ 2x+3 \end{pmatrix}\;. \end{array}$$

Wir machen noch eine Probe, obwohl diese nicht verlangt war:

Zum einen ist

$$f_\mathrm{p}'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} -x \\ -x-1 \\ 2x+3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\;.$$

Zum anderen ist

$$Af_\mathrm{p}(x) + b(x) \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x \\ -x-1 \\ 2x+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -4x-1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\;.$$

Also ist in der Tat $f_\mathrm{p}'(x) = Af_\mathrm{p}(x) + b(x)$.