Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 10

Hausaufgabe 28 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = |\cos(x)|.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

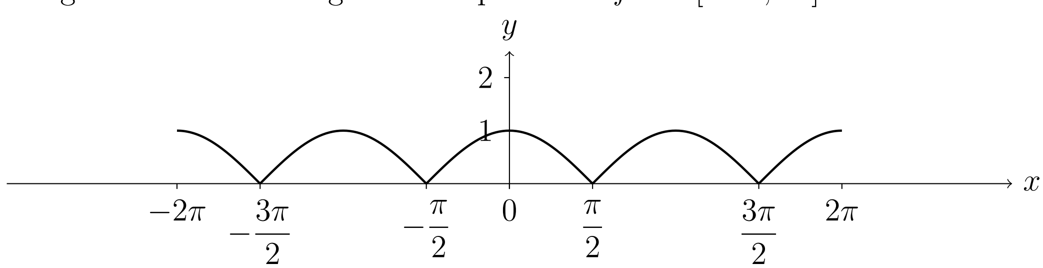
(c) Verwenden Sie die Gleichheit $f(0) = \text{Fourier}_f(0)$, um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$$

zu berechnen.

Lösung.

(a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f auf $[-2\pi, 2\pi]$.



(b) Die Funktion ist gerade, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $b_n = 0$ für $n \geqslant 1$. Wir haben also nur die Koeffizienten a_n für $n \geqslant 0$ zu berechnen.

Für $n \geqslant 0$ wird

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(x)| \cos(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) \cos(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx) \cos(x) \, \mathrm{d}x \right) . \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \cos(nx)\cos(x) &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) \cdot \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \\ &= \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}) \\ &= \tfrac{1}{4}(2\cos((n+1)x) + 2\cos((n-1)x)) \\ &= \tfrac{1}{2}\cos((n+1)x) + \tfrac{1}{2}\cos((n-1)x)) \end{aligned}$$

Fall $n \neq 1$. Wir setzen fort mit

$$\begin{array}{rl} & \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\cos(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ = & \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos((n+1)x) + \frac{1}{2}\cos((n-1)x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos((n+1)x) + \frac{1}{2}\cos((n-1)x)\,\mathrm{d}x\right) \\ = & \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\,\mathrm{d}x\right) \\ = & \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n+1}\sin((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\sin((n-1)x)\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{1}{n+1}\sin((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\sin((n-1)x)\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) \\ = & \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\sin((n+1)\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{n-1}\sin((n-1)\frac{\pi}{2})\right) \ . \end{array}$$

Falls n ungerade ist, dann ist $\sin((n+1)\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin((n-1)\frac{\pi}{2}) = 0$. Somit ist diesenfalls $a_n = 0$.

Falls n gerade ist, also $n = 2k$, dann ist

$$\begin{array}{rclclcl} \sin((n+1)\frac{\pi}{2}) & = & \sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) & = & \sin(2k\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(2k\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) & = & (-1)^k \\ \sin((n-1)\frac{\pi}{2}) & = & \sin((2k-1)\frac{\pi}{2}) & = & \sin(2k\frac{\pi}{2})\cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos(2k\frac{\pi}{2})\sin(-\frac{\pi}{2}) & = & -(-1)^k \end{array}$$

Wir setzen fort mit

$$\begin{array}{rcl} a_{2k} & = & \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}(-1)^k - \frac{1}{2k-1}(-1)^k\right) \\ & = & \frac{2(-1)^k}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) \\ & = & \frac{2(-1)^k}{\pi}\,\frac{(2k-1)-(2k+1)}{(2k+1)(2k-1)} \\ & = & -\frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \ . \end{array}$$

Fall $n = 1$. Wir setzen fort mit

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ & = & \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\right) \\ & = & \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) \\ & = & 0 \ . \end{array}$$

Somit wird

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \ = \ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) \ = \ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\cos(2kx) \ = \ \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kx) \ .$$

(c) Da f stetig ist, können wir $f(0) = \mathrm{Fourier}_f(0)$ verwenden, um

$$1 \ = \ f(0) \ = \ \mathrm{Fourier}_f(0) \ = \ \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\cos(2k\cdot 0) \ = \ \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \ .$$

zu erhalten. Es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} \ = \ \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) \ = \ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \ .$$

Hausaufgabe 29 Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

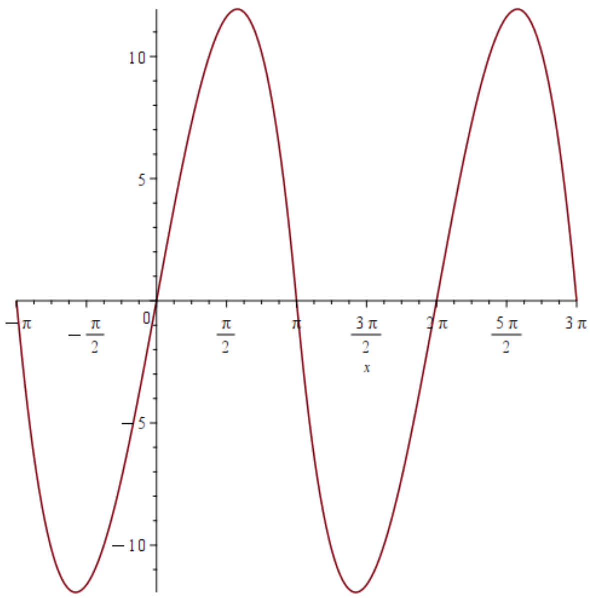
$$f(x) = x(\pi^2 - x^2) \ .$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Lösung.

(a) Der Graph der Funktion $f(x)$ für $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$:



(b) Die Funktion ist ungerade, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Also ist $a_n = 0$ für $n \geqslant 0$.

Wir müssen nur b_n berechnen für $n \geqslant 1$. Es wird

$$\begin{aligned}
b_n &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi^2 - x^2)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{2}{\pi}\Big(\big[(\pi^2 x - x^3)(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))\big]_0^\pi - \int_0^\pi (\pi^2 - 3x^2)(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \tfrac{2}{\pi n}\int_0^\pi (\pi^2 - 3x^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{2}{\pi n}\Big([(\pi^2 - 3x^2)\tfrac{1}{n}\sin(nx)]_0^\pi - \int_0^\pi (0 - 6x)\tfrac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \tfrac{12}{\pi n^2}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{12}{\pi n^2}\Big([x(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \tfrac{12}{\pi n^2}\Big(-\tfrac{\pi}{n}(-1)^n + \tfrac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \tfrac{12}{\pi n^2}\Big(-\tfrac{\pi}{n}(-1)^n + \tfrac{1}{n}[\tfrac{1}{n}\sin(nx)]_0^\pi\Big) \\
&= \tfrac{12}{n^3}(-1)^{n+1} \ .
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nx) \ .$$

Hausaufgabe 30 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ -x + 2\pi & \text{für } \quad 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

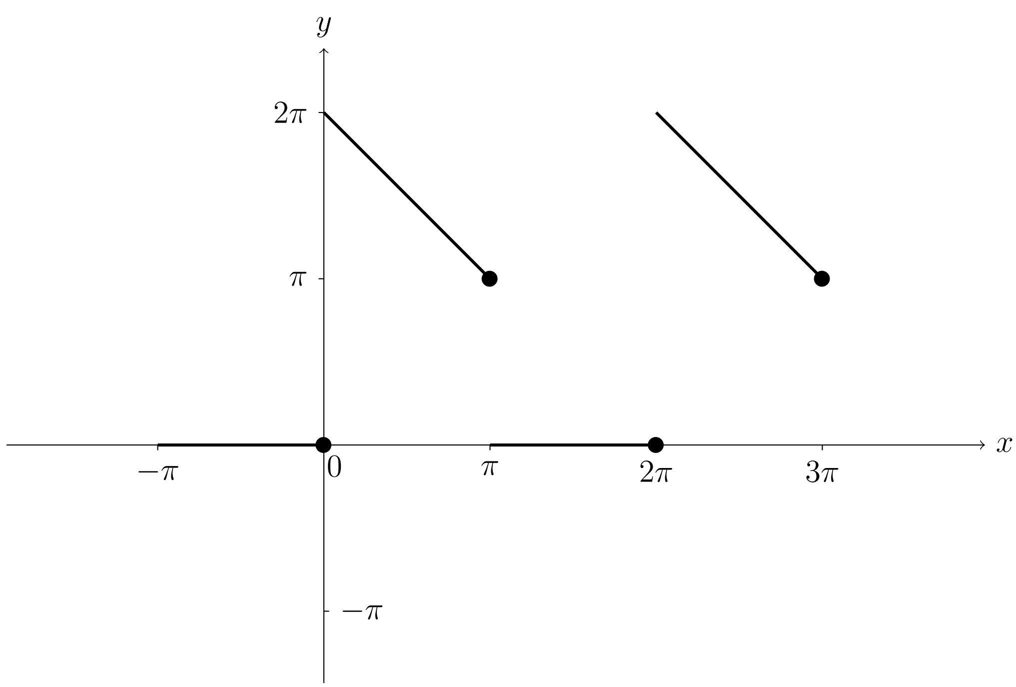
(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-\pi < x \leqslant 3\pi$. Bestimmen Sie $\text{Fourier}_f(0)$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Sei $u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ für $x \in \mathbb{R}$.
Skizzieren Sie den Graphen von $u(x)$ für $-\pi < x \leqslant 3\pi$. Welchen Wert hat $u(\pi)$?
Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $u(x)$ unter Verwendung von (b).

Lösung.

(a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f für $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$:



An der Sprungstelle $x_0 = 0$ ist $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 2\pi$. Also ist

$$\text{Fourier}_f(0) \;=\; \tfrac{1}{2}\big(\lim_{x \to 0-0} f(x) + \lim_{x \to 0+0} f(x)\big) \;=\; \tfrac{1}{2}(0 + 2\pi) \;=\; \pi\,.$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\pi}\big(\textstyle\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} -x + 2\pi\,\mathrm{d}x\big) \\ &= \tfrac{1}{\pi}[-\tfrac{1}{2}x^2 + 2\pi x]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{\pi}(-\tfrac{1}{2}\pi^2 + 2\pi^2) \\ &= \tfrac{3}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

Für $n \geqslant 1$ wird

$$
\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\big(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}(-x+2\pi)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\big) \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+2\pi)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\big([(-x+2\pi)\tfrac{1}{n}\sin(nx)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\tfrac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\big) \\
&= \tfrac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi n}[-\tfrac{1}{n}\cos(nx)]_0^{\pi} \\
&= -\tfrac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-1) \\
&= \tfrac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\ .
\end{aligned}
$$

Für $n \geqslant 1$ wird

$$
\begin{aligned}
b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\big(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}(-x+2\pi)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\big) \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+2\pi)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\pi}\big([(-x+2\pi)(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))\,\mathrm{d}x\big) \\
&= \tfrac{1}{\pi}\big(((-\pi+2\pi)(-\tfrac{1}{n}\cos(n\pi)) - (-0+2\pi)(-\tfrac{1}{n}\cos(0))) - \tfrac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx))\,\mathrm{d}x\big) \\
&= \tfrac{1}{\pi}\big((-\tfrac{\pi}{n}(-1)^n + \tfrac{2\pi}{n}) - \tfrac{1}{n}[\tfrac{1}{n}\sin(nx)]_0^{\pi}\big) \\
&= \tfrac{1}{n}(2-(-1)^n)\ .
\end{aligned}
$$

Damit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

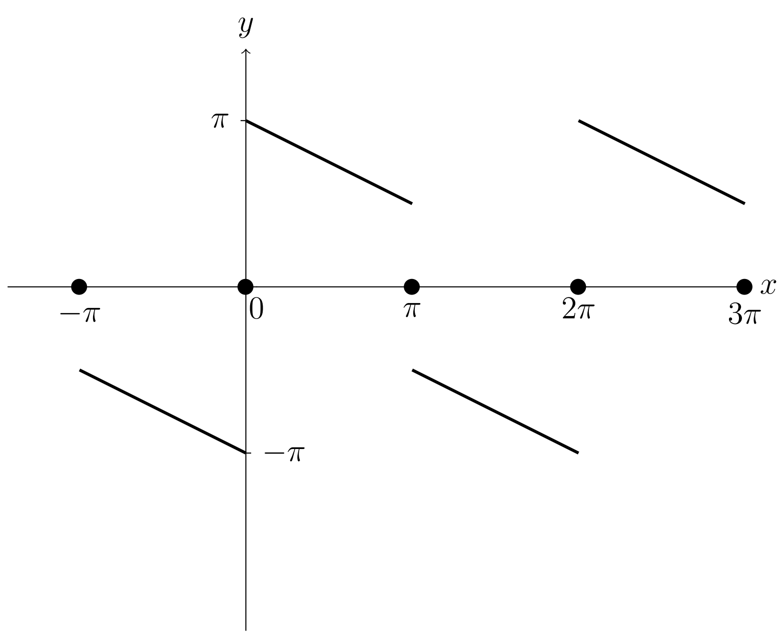
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Fourier}_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx) \\
&= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2-(-1)^n)\sin(nx) \\
&= \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2-(-1)^n)\sin(nx)\ .
\end{aligned}
$$

(c) Für $x \in (-\pi, \pi]$ wird

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\
&= \begin{cases} \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } x = 0 \\ \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } 0 < x < \pi \\ \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{falls } x = \pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} \tfrac{1}{2}(0 - (x + 2\pi)) & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \tfrac{1}{2}(0 - 0) & \text{falls } x = 0 \\ \tfrac{1}{2}((-x + 2\pi) - 0) & \text{falls } 0 < x < \pi \\ \tfrac{1}{2}((-\pi + 2\pi) - (-\pi + 2\pi)) & \text{falls } x = \pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\tfrac{1}{2}x - \pi & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -\tfrac{1}{2}x + \pi & \text{falls } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{falls } x = \pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist $u(\pi) = 0$.

Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von u für $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$:



Die Fourierreihe von $u(x)$ ist die Sinusreihe von $\text{Fourier}_f(x)$, also

$$\text{Fourier}_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2 - (-1)^n)\sin(nx)\ .$$