Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 11

Hausaufgabe 31 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{x^2}{\pi} - |x|.$$

Die Fourier-Reihe von f sei bereits bekannt:

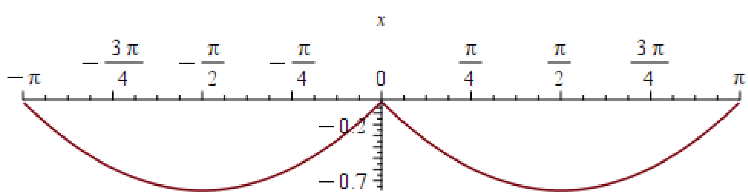
$$\mathrm{Fourier}_f(x) \;=\; -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{k^2} \cos(kx)\ .$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_{f'}(x)$ für die Ableitung f'.

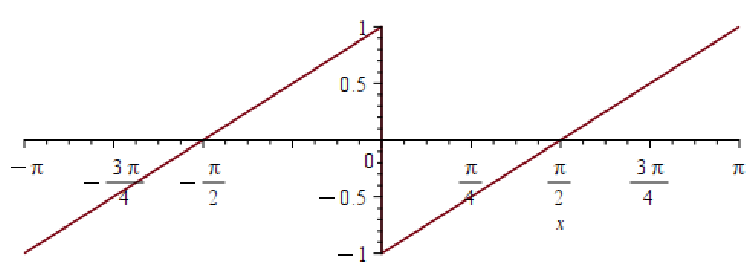
(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_{f'}(0)$ durch Einsetzen von $x = 0$ in $\mathrm{Fourier}_{f'}(x)$.
Bestimmen Sie $\mathrm{Fourier}_{f'}(0)$ unter Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0-0} f'(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)$.
Vergleichen Sie die Resultate.

(c) Sei $f'_N(x)$ das N-te Fourier-Polynom von $f'(x)$ für $N \geqslant 1$.
Bestimmen Sie $\|f' - f'_1\|^2$ und $\|f' - f'_2\|^2$.

Lösung. Zunächst eine Skizze des Graphen von $f(x)$ auf $[-\pi, \pi]$ (nicht verlangt):



Dann eine Skizze des Graphen von $f'(x)$ auf $[-\pi, \pi]$ (nicht verlangt):



(a) Es ist f stetig, da die Funktion sich auf $(-\pi, \pi]$ als Summe zweier stetiger Funktionen schreibt, da

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) \;=\; \frac{\pi^2}{\pi} - |\pi| \;=\; 0$$

und

$$\lim_{x\to\pi+0} f(x) \;=\; \lim_{x\to-\pi+0} f(x-2\pi) \;=\; \frac{(-\pi)^2}{\pi} - |-\pi| \;=\; 0$$

übereinstimmen und da $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion ist.

Also können wir $\text{Fourier}_f(x)$ summandenweise ableiten, um $\text{Fourier}_{f'}(x)$ zu berechnen:

$$\text{Fourier}_{f'}(x) \;=\; \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(-1)^k+1}{k^2}\cos(kx) \;=\; -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+1}{k}\sin(kx)\;.$$

(b) Einsetzen ergibt

$$\text{Fourier}_{f'}(0) \;=\; -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+1}{k}\sin(k\cdot 0) \;=\; 0\;.$$

Auf der anderen Seite ist

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi}+1 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ \frac{2x}{\pi}-1 & \text{für } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

und also

$$\lim_{x\to 0-0} f'(x) \;=\; \lim_{x\to 0-0}\frac{2x}{\pi}+1 \;=\; 1$$

und

$$\lim_{x\to 0+0} f'(x) \;=\; \lim_{x\to 0-0}\frac{2x}{\pi}-1 \;=\; -1\;.$$

An der Sprungstelle $x_0 = 0$ von $f'(x)$ wird also

$$\text{Fourier}_{f'}(0) \;=\; \tfrac{1}{2}\big(\lim_{x\to 0-0} f'(x) + \lim_{x\to 0+0} f'(x)\big) \;=\; \tfrac{1}{2}(1+(-1)) \;=\; 0\;.$$

Dies bestätigt den oben durch direktes Einsetzen erhaltenen Wert.

(c) Aus (a) erhalten wir

$$\text{Fourier}_{f'}(x) \;=\; -\tfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^k+1}{k}\sin(kx) \;=-\tfrac{2\cdot 2}{\pi\cdot 1}\sin(2x) - \tfrac{2\cdot 2}{\pi\cdot 4}\sin(4x) - \tfrac{2\cdot 2}{\pi\cdot 6}\sin(6x) - \ldots$$

Hieraus ergibt sich das erste Fourier-Polynom zu

$$f_1'(x) \;=\; 0$$

und das zweite Fourier-Polynom zu

$$f_2'(x) \;=\; -\tfrac{2\cdot 2}{\pi\cdot 2}\sin(2x) = -\tfrac{2}{\pi}\sin(2x)\;.$$

Zu $\|f' - f_1'\|^2$. Da $f'(x) - f_1'(x)$ ungerade ist, ist $(f'(x) - f_1'(x))^2$ gerade und also

$$\begin{aligned}
\|f' - f_1'\|^2 &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x) - f_1'(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\textstyle\int_0^{\pi} (f'(x) - f_1'(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\textstyle\int_0^{\pi} \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\textstyle\int_0^{\pi} \left(\frac{4x^2}{\pi^2} - \frac{4x}{\pi} + 1\right) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{4x^3}{3\pi^2} - \frac{4x^2}{2\pi} + x\right]_0^{\pi} \\
&= 2\left[\frac{4\pi}{3} - 2\pi + \pi\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

Zu $\|f - f_2\|^2$.
Wir merken zunächst an: $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.
Da $f'(x) - f_2'(x)$ ungerade ist, ist $(f'(x) - f_2'(x))^2$ gerade und also

$$\begin{aligned}
\|f' - f_2'\|^2 &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x) - f_2'(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\textstyle\int_0^{\pi} (f'(x) - f_2'(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\textstyle\int_0^{\pi} \left(\frac{2x}{\pi} - 1 + \frac{2}{\pi}\sin(2x)\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\textstyle\int_0^{\pi} \left(\frac{4x^2}{\pi^2} + 1 + \frac{4}{\pi^2}\sin(2x)^2 - \frac{4x}{\pi} + \frac{8x}{\pi^2}\sin(2x) - \frac{4}{\pi}\sin(2x)\right) \,\mathrm{d}x \;\ldots
\end{aligned}$$

Da allgemein $\sin(t)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$ ist, ist hier $\sin(2x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$.
Ferner ist $\int x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = [x(-\frac{1}{2}\cos(2x))] - \int 1\cdot(-\frac{1}{2}\cos(2x))\,\mathrm{d}x = [-\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)]$.
Wir setzen fort:

$$\begin{aligned}
\ldots &= 2\textstyle\int_0^{\pi} \left(\frac{4x^2}{\pi^2} + 1 + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\right) - \frac{4x}{\pi} + \frac{8x}{\pi^2}\sin(2x) - \frac{4}{\pi}\sin(2x)\right) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{4x^3}{3\pi^2} + x + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \frac{4x^2}{2\pi} + \frac{8}{\pi^2}\left(-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right) + \frac{4\cos(2x)}{2\pi}\right]_0^{\pi} \\
&= 2\left(\frac{4\pi}{3} + \pi + \frac{2}{\pi} - 2\pi - \frac{4}{\pi} + \frac{4}{2\pi} - \frac{4}{2\pi}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

Alternative Lösung zu $\|f' - f_2'\|^2$ *mit Parseval:* Es ist $\pi\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = \|f'\|^2 = \|f' - f_1'\|^2 = \frac{2\pi}{3}$ mit Parseval und vorstehender Rechnung, wobei b_j die Fourier-Koeffizienten zu f' sind.

Nun ist auch $f' - f_2'$ eine Fourier-Reihe, nämlich $f'(x) - f_2'(x) = \sum_{j=3}^{\infty} b_j \sin(jx)$. Also ist mit Parseval

$$\begin{aligned}
\|f' - f_2'\|^2 &= \pi\textstyle\sum_{j=3}^{\infty} b_j^2 \\
&= \pi\left(-b_2^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2\right) \\
&= \pi\left(-b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2\right) \\
&= \pi\left(-0 - (-\frac{2}{\pi})^2 - 0^2 + \frac{2}{3}\right) \\
&= -\frac{4}{\pi} + \frac{2}{3}\pi\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 32

(a) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Platzaufgabe 30, um $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ zu berechnen.

(b) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Hausaufgabe 28, um $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$ zu berechnen.

Lösung. Die Parsevalsche Gleichung lautet allgemein

$$\|f\|^2 = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^2 + b_j^2\right) .$$

(a) Für die Funktion $f(x)$ aus Platzaufgabe 30 wird

$$\|f\|^2 \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^5}{20}\right]_{-\pi}^{\pi} \;=\; \frac{\pi^5}{10} .$$

Aus Platzaufgabe 30 wissen wir $a_0 = \frac{1}{3}\pi^2$ und $a_k = \frac{2(-1)^k}{k^2}$ für $k \geqslant 1$.
Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{\pi^5}{10} = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^2 + b_j^2\right) \;&=\; \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \\ &=\; \frac{\pi^5}{18} + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \end{aligned}$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \;=\; \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi^5}{10} - \frac{\pi^5}{18}\right) \;=\; \frac{\pi^4}{90} .$$

(b) Für die Funktion $f(x)$ aus Hausaufgabe 28 wird, unter Verwendung von $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 \;&=\; \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &=\; 2\textstyle\int_0^{\pi} \cos(x)^2 \,\mathrm{d}x \\ &=\; 2\textstyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) \mathrm{d}x \\ &=\; 2\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\ &=\; \pi . \end{aligned}$$

Aus Hausaufgabe 28 kennen wir die Fourier-Reihe

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \;=\; \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx)\ .$$

Hierbei steht vor $\cos(2kx)$ der Koeffizient $a_{2k} = -\frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}$. Ferner ist $a_0 = \frac{4}{\pi}$. Alle anderen Fourier-Koeffizienten sind gleich 0.

Wir haben

$$\begin{aligned}
\pi &= \|f\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^2 + b_j^2\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2 \\
&= \tfrac{\pi}{2} \cdot \tfrac{16}{\pi^2} + \pi \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}\right)^2 \\
&= \tfrac{8}{\pi} + \tfrac{16}{\pi} \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}\ .
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} \;=\; \frac{\pi}{16}\left(\pi - \frac{8}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ .$$

Hausaufgabe 33 Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} + 1 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ \frac{2x}{\pi} - 1 & \text{für } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\operatorname{Fourier}_g^{\mathbb{C}}(x)$.

(b) Bestätigen Sie durch Vergleich mit Hausaufgabe 31, dass $g(x) = f'(x)$ ist an allen Stellen, an denen f differenzierbar ist. Bestätigen Sie ferner, dass die Koeffizienten c_k von $\operatorname{Fourier}_g^{\mathbb{C}}(x)$ mit den dortigen Koeffizienten a_k, b_k von $\operatorname{Fourier}_{f'}(x)$ in folgender Beziehung stehen.

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geqslant 1.$$

Lösung.

(a) Die komplexe Fourier-Reihe ist gegeben durch

$$\operatorname{Fourier}_g^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x.$$

Für $k = 0$ wird

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \left(\frac{2x}{\pi} - 1 \right) \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x^2}{\pi} + x \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{\pi} - x \right]_{0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (0 + 0) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \left(\frac{2x}{\pi} - 1 \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{\mathrm{i}k} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\mathrm{i}k} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right]_{0}^{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\mathrm{i}k} \left[x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\mathrm{i}k} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\mathrm{i}k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} - 1 \right) + \frac{1}{\mathrm{i}k} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k} - \frac{\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k} - \frac{1}{(\mathrm{i}k)^2} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{\mathrm{i}k} \left((-1)^k - 1 \right) + \left(-\frac{4(-1)^k}{\mathrm{i}k} \right) \right), \\
&= -\frac{1}{\mathrm{i}\pi k} \left((-1)^k + 1 \right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\pi k} \left((-1)^k + 1 \right) \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = (-1)^k$ verwendet haben.

Somit wird

$$\mathrm{Fourier}_g^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{\pi k} \left((-1)^k + 1 \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \,.$$

(b) Aus Hausaufgabe 31 kennen wir die Koeffizienten der Fourier-Reihe $\mathrm{Fourier}_{f'}(x)$:

$$a_k = 0$$

für $k \geqslant 0$ und

$$b_k = -\frac{2}{k\pi} \left(1 + (-1)^k \right)$$

für $k \geqslant 1$.

Wir führen den Vergleich der Koeffizienten durch.

Man erhält

$$0 = 2c_0 = a_0 = 0 \,.$$

Für $k \geqslant 1$ erhält man

$$c_k + c_{-k} = \frac{\mathrm{i}}{k\pi} \left((-1)^k + 1 \right) + \frac{\mathrm{i}}{(-k\pi)} \left((-1)^{-k} + 1 \right) = 0 = a_k \,.$$

Desweiteren ist für $k \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\left(c_k - c_{-k}\right) &= \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{i}}{k\pi}\big((-1)^k + 1\big) - \frac{\mathrm{i}}{(-k\pi)}\big((-1)^{-k} + 1\big)\right) \\
&= \frac{2\mathrm{i}^2}{k\pi}\big((-1)^k + 1\big) \\
&= -\frac{2}{k\pi}\big(1 + (-1)^k\big) \\
&= b_k\,.
\end{aligned}
$$

Dies bestätigt die gefragten Beziehungen.