Lösung 12

Hausaufgabe 34 Sei $f : (0,3) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := 3 - x$.

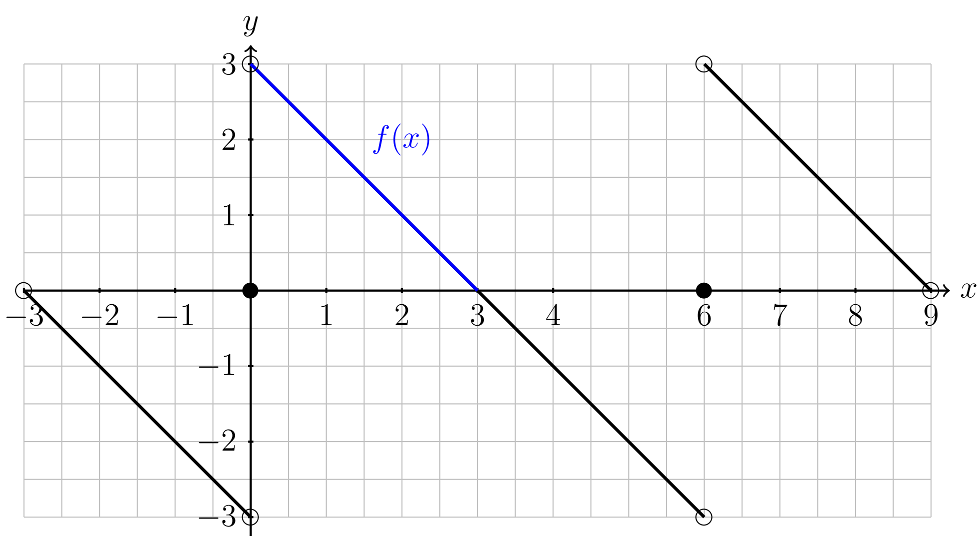
(a) Sei $F(x)$ die ungerade 6-periodische Fortsetzung von $f(x)$.
Skizzieren Sie den Graphen von $F(x)$ für $-3 \leqslant x \leqslant 9$.
Markieren Sie darin den Graphen von $f(x)$.
Geben Sie die Funktionswerte $F(0)$ und $F(3)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Fourier}_F(x)$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{Fourier}_F^{\mathbb{C}}(x)$.

Lösung.

(a) Skizze von $F(x)$:



Es ist $F(0) = F(3) = 0$.

(b) Mit $L = 3$ und $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{3}$ berechnen sich die Fourier-Koeffizienten wie folgt.
Für $j \geqslant 1$ wird

$$\begin{aligned}
b_j &= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\left(j\frac{\pi}{3}x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\sin\left(j\frac{\pi}{3}x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\left(\left[(3-x)\left(-\frac{3}{j\pi}\cos\left(j\frac{\pi}{3}x\right)\right)\right]_0^3 - \int_0^3 (-1)\frac{3}{j\pi}\left(-\cos\left(j\frac{\pi}{3}x\right)\right)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{j\pi} - \left[\frac{9}{j^2\pi^2}\sin\left(j\frac{\pi}{3}x\right)\right]_0^3\right) \\
&= \frac{6}{j\pi}
\end{aligned}$$

Für die Fourier-Reihe ergibt sich $\text{Fourier}_F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{6}{j\pi} \sin\left(j\frac{\pi}{3}x\right)$.

(c) Da die Fourier-Koeffizienten a_k alle gleich 0 sind, erhalten wir mit (b) die Koeffizienten $c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) = -\frac{3\mathrm{i}}{k\pi}$ und $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k) = \frac{3\mathrm{i}}{k\pi}$ für $k \geqslant 1$.

Somit ist $c_k = -\frac{3\mathrm{i}}{k\pi}$ für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

Dazuhin ist $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$.

Damit ergibt sich

$$\text{Fourier}_F^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{3}x} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left(-\frac{3\mathrm{i}}{k\pi}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{3}x} \,.$$

Hausaufgabe 35 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y \cdot u_x \;=\; x \cdot u_y \;.$$

(a) Überprüfen Sie: $u(x,y) = f(x^2+y^2)$ ist eine Lösung der betrachteten Differentialgleichung für jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,y)$ der betrachteten Differentialgleichung, für welche $u(x,2x) = x^4$ ist für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sei $u(x,y)$ eine Lösung der betrachteten Differentialgleichung, die nicht unbedingt aus (a) zu stammen hat.
Sei $C : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : C(t) = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$ eine Parametrisierung des Einheitskreises.
Man rechne nach: Es ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(C(t)) = 0$ für $t \in [0,2\pi]$.
Gibt es $t_1,\, t_2 \in [0,2\pi]$ mit $u(\cos(t_1),\sin(t_1)) \neq u(\cos(t_2),\sin(t_2))$?

Lösung.

(a) Auf der einen Seite wird

$$\begin{aligned} y \cdot u_x &= y \cdot \tfrac{\partial}{\partial x} f(x^2+y^2) \\ &= y \cdot f'(x^2+y^2) \cdot 2x \;. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{aligned} x \cdot u_y &= x \cdot \tfrac{\partial}{\partial y} f(x^2+y^2) \\ &= x \cdot f'(x^2+y^2) \cdot 2y \;. \end{aligned}$$

Die beiden Seiten stimmen überein. Somit ist tatsächlich $y \cdot u_x = x \cdot u_y$.

(b) Wir suchen eine Lösung wie in (a), also von der Form $u(x,y) = f(x^2+y^2)$ mit

$$x^4 \;=\; u(x,2x) \;=\; f(x^2+y^2) \;=\; f(5x^2) \;.$$

Da $x^4 = \frac{1}{25}(5x^2)^2$, können wir $f(t) = \frac{1}{25}t^2$ nehmen, um

$$f(5x^2) \;=\; \tfrac{1}{25}(5x^2)^2 \;=\; x^4$$

zu erhalten. Damit wird

$$u(x,y) \;=\; f(x^2+y^2) \;=\; \tfrac{1}{25}(x^2+y^2)^2 \;.$$

(c) Sei $u(x,y)$ eine Funktion, die

$$y \cdot u_x(x,y) - x \cdot u_y(x,y) \;=\; 0$$

erfüllt für $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.

Setzt man hier $\binom{x}{y} = C(t) = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$ ein, so erhalten wir

$$\sin(t) \cdot u_x(\cos(t),\sin(t)) - \cos(t) \cdot u_y(\cos(t),\sin(t)) \;=\; 0 \;.$$

Nun wird

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(C(t)) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(\cos(t), \sin(t)) \\
&= u_x(\cos(t), \sin(t)) \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos(t) + u_y(\cos(t), \sin(t)) \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin(t) \\
&= -u_x(\cos(t), \sin(t)) \cdot \sin(t) + u_y(\cos(t), \sin(t)) \cdot \cos(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

gemäß der vorbereitenden Rechnung.

Da nun $\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(\cos(t), \sin(t)) = 0$ ist, ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto u(\cos(t), \sin(t))$ eine konstante Funktion.

Folglich ist für $t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}$ stets

$$u(\cos(t_1), \sin(t_1)) = h(t_1) = h(t_2) = u(\cos(t_2), \sin(t_2)) \; .$$

Also gibt es keine $t_1,\, t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $u(\cos(t_1), \sin(t_1)) \neq u(\cos(t_2), \sin(t_2))$.

Hausaufgabe 36 Wir betrachten die Differentialgleichung $u_{xx} + u_y \;=\; 0$.

(a) Bestimmen Sie Funktionen $f(x)$ und $g(y)$, für welche

$$u(x, y) \;=\; f(x) \cdot g(y)$$

eine Lösung der betrachteten Differentialgleichung ist, die $u(x, 0) = \mathrm{e}^x$ erfüllt für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie Funktionen $f(x)$ und $g(y)$, für welche

$$u(x, y) \;=\; f(x) \cdot g(y)$$

eine Lösung der betrachteten Differentialgleichung ist, die $u(0, y) = \mathrm{e}^{-2y}$ erfüllt für $y \in \mathbb{R}$. Liegt $u(x, y)$ damit eindeutig fest?

Lösung.

(a) Wir setzen $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ an. Es soll

$$u(x, 0) \;=\; f(x) \cdot g(0) \;=\; \mathrm{e}^x$$

sein, also $g(0) \neq 0$ und $f(x) = \frac{1}{g(0)}\mathrm{e}^x$.
Ferner sollte

$$0 \;=\; u_{xx} + u_y \;=\; \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x) \cdot g(y)) + \tfrac{\partial}{\partial y}(f(x) \cdot g(y)) \;=\; f''(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$$

sein, also

$$\tfrac{1}{g(0)}\mathrm{e}^x \cdot g(y) + \tfrac{1}{g(0)}\mathrm{e}^x \cdot g'(y)\ .$$

Es folgt

$$g'(y) + g(y) \;=\; 0\ .$$

Als eine Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir z.B. nach 3.3.2 die Funktion $g(y) = \mathrm{e}^{-y}$ wählen.
Insgesamt wird

$$u(x, y) \;=\; f(x) \cdot g(y) \;=\; \tfrac{1}{\mathrm{e}^{-0}}\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-y} \;=\; \mathrm{e}^{x-y}\ .$$

(b) Wir setzen $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ an. Es soll

$$u(0, y) \;=\; f(0) \cdot g(y) \;=\; \mathrm{e}^{-2y}$$

sein, also $f(0) \neq 0$ und $g(y) = \frac{1}{f(0)}\mathrm{e}^{-2y}$.
Ferner sollte

$$0 \;=\; u_{xx} + u_y \;=\; \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x) \cdot g(y)) + \tfrac{\partial}{\partial y}(f(x) \cdot g(y)) \;=\; f''(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$$

sein, also

$$f''(x) \cdot \tfrac{1}{f(0)}\mathrm{e}^{-2y} + f(x) \cdot \tfrac{1}{f(0)}\mathrm{e}^{-2y} \cdot (-2)\ .$$

Es folgt

$$f''(x) - 2f(x) \;=\; 0\ .$$

Diese Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom $X^2-2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, mit den Nullstellen $\lambda_1 = \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Das liefert die Lösungen $f_1(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{2}}$ und $f_2(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}$; vgl. 4.3.1.

Insgesamt erhalten wir die Lösungen

$$u_1(x,y) \;=\; f_1(x)\cdot g(y) \;=\; \mathrm{e}^{x\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{0\cdot\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-2y} \;=\; \mathrm{e}^{x\sqrt{2}-2y}$$

und

$$u_2(x,y) \;=\; f_2(x)\cdot g(y) \;=\; \mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{-0\cdot\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-2y} \;=\; \mathrm{e}^{-x\sqrt{2}-2y}$$

des gestellten Problems.

Es wird also $u(x,y)$ von den gestellten Bedingungen nicht eindeutig festgelegt.