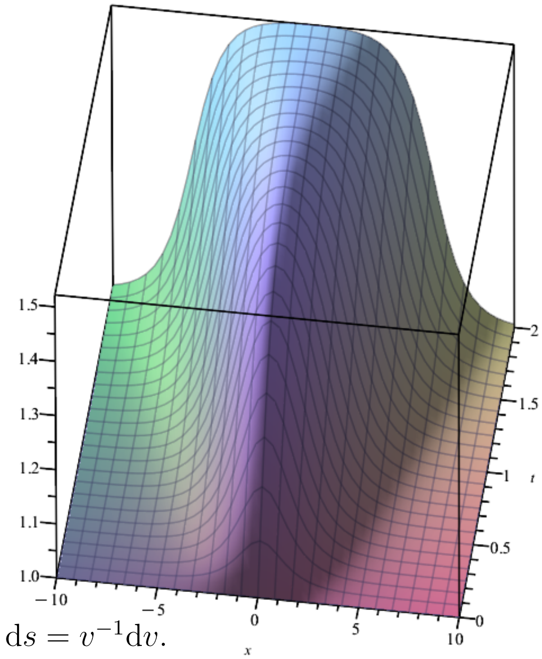
Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso, Krauß Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 14



Hausaufgabe 40 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} = 9u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = 1\,, \qquad u_t(x,0) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Berechnen Sie $\int \frac{1}{\cosh(s)}\,\mathrm{d}s$ unter Verwendung der Substitution $v := \mathrm{e}^s$.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $u(x,t)$.
Der Graph der Lösung ist rechts ersichtlich.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to+\infty} u(0,t)$.

Lösung.

(a) Substituieren wir $v := \mathrm{e}^s$, dann ist $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^s = v$ und also $\mathrm{d}s = v^{-1}\mathrm{d}v$.
Damit wird

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1}{\cosh(s)}\,\mathrm{d}s &= \int \tfrac{1}{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^s+\mathrm{e}^{-s})}\,\mathrm{d}s \\
&= \int \tfrac{1}{\frac{1}{2}(v+v^{-1})}\,v^{-1}\,\mathrm{d}v \\
&= \int \tfrac{2}{v^2+1}\,\mathrm{d}v \\
&= [2\arctan(v)] \\
&= [2\arctan(\mathrm{e}^s)]\,.
\end{aligned}$$

(b) Mit der d'Alembertschen Formel wird, unter Verwendung von $c = 3$, $f(x) = 1$ und $g(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \tfrac{1}{2}(f(x-3t)+f(x+3t)) + \tfrac{1}{2\cdot 3}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)\,\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \tfrac{1}{2}(1+1) + \tfrac{1}{6}[2\arctan(\mathrm{e}^s)]_{s=x-3t}^{s=x+3t} \\
&= 1 + \tfrac{1}{3}(\arctan(\mathrm{e}^{x+3t}) - \arctan(\mathrm{e}^{x-3t}))\,.
\end{aligned}$$

(c) Es wird

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} u(0,t) &= \lim_{t\to+\infty} 1 + \tfrac{1}{3}(\arctan(\mathrm{e}^{0+3t}) - \arctan(\mathrm{e}^{0-3t})) \\
&= 1 + \tfrac{1}{3}\big(\lim_{s\to+\infty}\arctan(s) - \lim_{s\to 0}\arctan(s)\big) \\
&= 1 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{\pi}{2} - 0) \\
&= 1 + \tfrac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

Vgl. HM 2, 1.12.1.7.

Hausaufgabe 41 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \;=\; 0\,, \qquad u_t(x,0) \;=\; \sin(2\pi x) \qquad \text{für } x \in [0,1]$$

und den Randbedingungen $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $u(x,t)$.

(b) Überprüfen Sie zur Probe die Lösung $u(x,t)$ aus (a) durch Einsetzen in die Wellengleichung $u_{tt} \;=\; u_{xx}$, die Anfangsbedingungen und die Randbedingungen.

Lösung.

(a) Wir verwenden 8.3.7 mit $L = 1$, $c = 1$, $f(x) = 0$ und $g(x) = \sin(2\pi x)$.

Zunächst wird

$$\begin{aligned}
F(x) \;&=\; \begin{cases} 0 + \frac{1}{2\cdot 1}\int_0^x \sin(2\pi s)\,\mathrm{d}s & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 + \frac{1}{2\cdot 1}\int_0^{-x} \sin(2\pi s)\,\mathrm{d}s & \text{für } -1 < x < 0 \end{cases} \\
&=\; \begin{cases} \frac{1}{2}[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)]_{s=0}^{s=x} & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)]_{s=0}^{s=-x} & \text{für } -1 < x < 0 \end{cases} \\
&=\; \begin{cases} \frac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi x)) & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi(-x))) & \text{für } -1 < x < 0 \end{cases} \\
&=\; \begin{cases} \frac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi x)) & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi x)) & \text{für } -1 < x < 0 \end{cases} \\
&=\; \tfrac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi x))
\end{aligned}$$

für $-1 < x \leqslant 1$. Dies ist $(2\cdot 1)$-periodisch fortzusetzen. Da $\frac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi x))$ bereits Periode 2 hat, erhalten wir

$$F(x) \;=\; \tfrac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi x))$$

für $x \in \mathbb{R}$. Damit wird

$$\begin{aligned}
u(x,t) \;&=\; F(x+t) - F(-x+t) \\
&=\; \tfrac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi(x+t))) - \tfrac{1}{4\pi}(1-\cos(2\pi(-x+t))) \\
&=\; \tfrac{1}{4\pi}(-\cos(2\pi(x+t)) + \cos(2\pi(-x+t)))\;.
\end{aligned}$$

Dies kann mittels Additionstheorem weiter umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
&\;u(x,t) \\
=&\;\tfrac{1}{4\pi}(-\cos(2\pi(x+t)) + \cos(2\pi(-x+t))) \\
=&\;\tfrac{1}{4\pi}(-\cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t) + \cos(2\pi(-x))\cos(2\pi t) - \sin(2\pi(-x))\sin(2\pi t)) \\
=&\;\tfrac{1}{4\pi}(-\cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t) + \cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t)) \\
=&\;\tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\sin(2\pi t)\;.
\end{aligned}$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} u_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\sin(2\pi t)\right) \\ &= \cos(2\pi x)\sin(2\pi t)\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tfrac{\partial}{\partial x}(\cos(2\pi x)\sin(2\pi t)) \\ &= -2\pi\sin(2\pi x)\sin(2\pi t)\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_t &= \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\sin(2\pi t)\right) \\ &= \sin(2\pi x)\cos(2\pi t)\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \tfrac{\partial}{\partial t}(\sin(2\pi x)\cos(2\pi t)) \\ &= -2\pi\sin(2\pi x)\sin(2\pi t)\ . \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $u_{tt} = u_{xx}$.

Es wird

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\sin(2\pi\cdot 0) = 0 \\ u_t(x,0) &= \sin(2\pi x)\cos(2\pi\cdot 0) \ = \ \sin(2\pi x) \end{aligned}$$

für $x \in [0,1]$. Daher erfüllt $u(x,t)$ die Anfangsbedingungen.

Es wird

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi\cdot 0)\sin(2\pi t) &= 0 \\ u(1,t) &= \tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi\cdot 1)\sin(2\pi t) &= 0 \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Daher erfüllt $u(x,t)$ die Randbedingungen.

Hausaufgabe 42 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; 25u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \;=\; \sin(x)\,, \qquad u_t(x,0) \;=\; \frac{1}{x^2+4} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $u(x,t)$ unter Verwendung der d'Alembertschen Formel.

(b) Bestimmen Sie $u_t(0,t)$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to+\infty} u_t(0,t)$.

Lösung.

(a) Mit der d'Alembertschen Formel wird, unter Verwendung von $c=5$, $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\frac{1}{x^2+4}$,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \tfrac{1}{2}(f(x-5t)+f(x+5t)) + \tfrac{1}{2\cdot 5}\int_{x-5t}^{x+5t} g(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{2}(\sin(x-5t)+\sin(x+5t)) + \tfrac{1}{10}\int_{x-5t}^{x+5t} \tfrac{1}{s^2+4}\,\mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{2}(\sin(x-5t)+\sin(x+5t)) + \tfrac{1}{10}\int_{x-5t}^{x+5t} \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{2}(\sin(x-5t)+\sin(x+5t)) + \tfrac{1}{10}\left[\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\frac{1}{2}}\arctan(\tfrac{s}{2})\right]_{x-5t}^{x+5t} \\
&= \tfrac{1}{2}(\sin(x-5t)+\sin(x+5t)) + \tfrac{1}{20}\left(\arctan(\tfrac{x+5t}{2}) - \arctan(\tfrac{x-5t}{2})\right)\,.
\end{aligned}$$

Dies kann man noch umformen zu

$$\begin{aligned}
&u(x,t) \\
=\;& \tfrac{1}{2}(\sin(x-5t)+\sin(x+5t)) + \tfrac{1}{20}\left(\arctan(\tfrac{x+5t}{2}) - \arctan(\tfrac{x-5t}{2})\right) \\
=\;& \tfrac{1}{2}(\sin(x)\cos(-5t)+\cos(x)\sin(-5t)+\sin(x)\cos(5t)+\cos(x)\sin(5t)) + \tfrac{1}{20}\left(\arctan(\tfrac{x+5t}{2}) - \arctan(\tfrac{x-5t}{2})\right) \\
=\;& \sin(x)\cos(5t) + \tfrac{1}{20}\left(\arctan(\tfrac{x+5t}{2}) - \arctan(\tfrac{x-5t}{2})\right)\,.
\end{aligned}$$

(b) Da $\arctan(x)$ eine ungerade Funktion ist, wird

$$\begin{aligned}
u_t(0,t) &= \left(\tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right)\big|_{x=0} \;=\; \tfrac{\partial}{\partial t}u(0,t) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\sin(0)\cos(5t) + \tfrac{1}{20}\left(\arctan(\tfrac{5t}{2}) - \arctan(\tfrac{-5t}{2})\right)\right) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{10}\arctan(\tfrac{5t}{2}) \\
&= \tfrac{1}{10}\tfrac{1}{\left(\frac{5t}{2}\right)^2+1}\tfrac{5}{2} \\
&= \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\frac{25t^2}{4}+1} \\
&= \tfrac{1}{25t^2+4}\,.
\end{aligned}$$

(c) Es wird

$$\lim_{t\to+\infty} u_t(0,t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{25t^2+4} = 0\,.$$