Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 15

Hausaufgabe 43 Wir betrachten die komplex differenzierbare Funktion

$$f \;:\; \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;:\; z \mapsto f(z) \;=\; \sin(z)\;.$$

(a) Bestimmen Sie $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))$ und $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))$, wobei $x,\, y \in \mathbb{R}$.
Überprüfen Sie: Es sind u und v harmonische Funktionen.

(b) Überprüfen Sie: Es erfüllen u und v die Cauchy-Riemann-Gleichungen.

(c) Wir betrachten das Vektorfeld $F(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{smallmatrix}\right)$ auf $\mathbb{R}^2$.

Überprüfen Sie: Es ist F quell- und wirbelfrei.

Lösung.

(a) Nach Euler-de-Moivre ist $\sin(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$.
Also wird

$$\begin{aligned} f(x+\mathrm{i}y) &= \sin(x+\mathrm{i}y) \\ &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}) \\ &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}) \\ &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{y}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \\ &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y}\cdot(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)) - \mathrm{e}^{y}\cdot(\cos(x)-\mathrm{i}\sin(x))) \\ &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-y}\cos(x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\sin(x) + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{y}\cos(x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{y}\sin(x) \\ &= \cosh(y)\sin(x) + \mathrm{i}\sinh(y)\cos(x)\;. \end{aligned}$$

Also wird

$$u(x,y) \;=\; \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y)) \;=\; \cosh(y)\sin(x)$$

und

$$v(x,y) \;=\; \mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y)) \;=\; \sinh(y)\cos(x)\;.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} v_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}(\sinh(y)\cos(x)) &&= -\sinh(y)\sin(x) \\ -u_y &= -\tfrac{\partial}{\partial y}(\cosh(y)\sin(x)) &&= -\sinh(y)\sin(x)\;. \end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

Ferner ist

$$\begin{aligned} v_y &= \tfrac{\partial}{\partial y}(\sinh(y)\cos(x)) &&= \cosh(y)\cos(x) \\ u_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}(\cosh(y)\sin(x)) &&= \cosh(y)\cos(x)\;. \end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

Also sind die Cauchy-Riemann-Gleichungen in der Tat erfüllt.

(c) Es ist

$$F(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \cosh(y)\sin(x) \\ -\sinh(y)\cos(x) \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(x,y) &= \tfrac{\partial}{\partial x}(\cosh(y)\sin(x)) + \tfrac{\partial}{\partial y}(-\sinh(y)\cos(x)) \\ &= \cosh(y)\cos(x) - \cosh(y)\cos(x) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Also ist F quellfrei.

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x,y) &= \tfrac{\partial}{\partial x}(-\sinh(y)\cos(x)) - \tfrac{\partial}{\partial y}(\cosh(y)\sin(x)) \\ &= \sinh(y)\sin(x) - \sinh(y)\sin(x) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Also ist F wirbelfrei.

Die auftretenden partiellen Ableitungen wurden auch schon in (b) verglichen.

Hausaufgabe 44

(a) Sei $n \geqslant 0$. Sei $f_n(z) = z^n$, definiert auf $\mathbb{C}$.

Sei $u_n(x,y) = \mathrm{Re}(f_n(x+\mathrm{i}y))$, wobei $x,\ y\ \in\ \mathbb{R}$.

Man bestimme $u_n(x,0)$.

(b) Man finde eine harmonische Funktion $u(x,y)$ mit $u(x,0) = x^3 - 2x^2 + x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Man bestimme $u(0,y)$.

(c) Man bestimme eine zu $u(x,y)$ harmonisch konjugierte Funktion $v(x,y)$.

Man bestimme $v(x,0)$ und $v(0,y)$.

(d) Bestimmen Sie eine harmonische Funktion $w(x,y)$ mit $w(x,0) = x^3 - 2x^2 + x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $w(0,y) = y^3 + 2y^2 - y$ für $y \in \mathbb{R}$.

Verifizieren Sie durch direkte Rechnung: Es erfüllt w die Bedingung $\Delta w = 0$ auf $\mathbb{R}^2$.

Lösung.

(a) Es wird

$$u_n(x,0) \;=\; \mathrm{Re}(f_n(x + \mathrm{i}\cdot 0)) \;=\; \mathrm{Re}(f_n(x)) \;=\; \mathrm{Re}(x^n) \;=\; x^n\ .$$

(b) Wir setzen an: $u(x,y) = u_3(x,y) - 2u_2(x,y) + u_1(x,y)$; siehe (a). Denn dann ist

$$u(x,0) \;=\; u_3(x,0) - 2u_2(x,0) + u_1(x,0) \;=\; x^3 - 2x^2 + x\ ,$$

wie verlangt.

Nun ist

$$\begin{array}{lclclcl}
u_1(x,y) & = & \mathrm{Re}((x+\mathrm{i}y)^1) & = & & & x \\
u_2(x,y) & = & \mathrm{Re}((x+\mathrm{i}y)^2) & = & \mathrm{Re}(x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2) & = & x^2 - y^2 \\
u_3(x,y) & = & \mathrm{Re}((x+\mathrm{i}y)^3) & = & \mathrm{Re}(x^3 + 3x^2y\mathrm{i} - 3xy^2 - y^3\mathrm{i}) & = & x^3 - 3xy^2\ .
\end{array}$$

Also wird

$$u(x,y) \;=\; u_3(x,y) - 2u_2(x,y) + u_1(x,y) \;=\; x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + x\ .$$

Insbesondere ist

$$u(0,y) \;=\; 2y^2\ .$$

(c) Wir betrachten folgendes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$.

$$K(x,y) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} -u_y \\ u_x \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 6xy-4y \\ 3x^2-3y^2-4x+1 \end{smallmatrix}\right)\ .$$

Wir berechnen die gesuchte zu $u(x,y)$ harmonisch konjugierte Funktion $v(x,y)$ als Potential zu K. Dazu rechnen wir wie folgt.

$$v(x,y) \;=\; \int 6xy - 4y\ \mathrm{d}x \;=\; 3x^2y - 4xy + c(y)\ ,$$

wobei $c(y)$ die Integrationskonstante ist, die von y, aber nicht von x abhängt. Ferner soll

$$v_y(x,y) \;=\; 3x^2 - 4x + c'(y) \;\stackrel{!}{=}\; 3x^2 - 3y^2 - 4x + 1$$

sein, also

$$c'(y) \;=\; -3y^2 + 1\ .$$

Somit können wir davon die Stammfunktion

$$c(y) \;=\; -y^3 + y$$

verwenden. Es wird

$$v(x,y) \;=\; 3x^2y - 4xy - y^3 + y\ .$$

Insbesondere wird

$$v(x,0) \;=\; 0$$

und

$$v(0,y) \;=\; -y^3 + y\ .$$

(d) Wenn wir $w(x,y) = u(x,y) + a \cdot v(x,y)$ mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$ ansetzen, dann ist jedenfalls

$$w(x,0) \;=\; u(x,0) + a \cdot v(x,0) \;=\; (x^3 - 2x^2 + x) + a \cdot 0 \;=\; x^3 - 2x^2 + x\ .$$

Es soll dazuhin noch

$$w(0,y) \;=\; u(0,y) + a \cdot v(0,y) \;=\; 2y^2 + a(-y^3 + y) \;\stackrel{!}{=}\; y^3 + 2y^2 - y$$

sein. Dies ist erfüllt für $a = -1$. Somit ist

$$\begin{aligned} w(x,y) &= u(x,y) - v(x,y) \\ &= (x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + x) - (3x^2y - 4xy - y^3 + y) \\ &= x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + x - 3x^2y + 4xy + y^3 - y \end{aligned}$$

eine harmonische Funktion, die die beiden genannten Randbedingungen erfüllt.

Zur Probe rechnen wir:

$$\begin{aligned} & \Delta w(x,y) \\ = \;& \Delta(x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + x - 3x^2y + 4xy + y^3 - y) \\ = \;& (6x + 0) - 3(0 + 2x) - 2(2 + 0) + 2(0 + 2) + (0 + 0) - 3(2y + 0) + 4(0 + 0) + (0 + 6y) - (0 + 0) \\ = \;& 0\ . \end{aligned}$$

Damit ist in der Tat $w(x,y)$ eine harmonische Funktion.