Differentialgeometrie für Geodäten

# Lösung 1

**Hausaufgabe 1**

Wir betrachten die Kurve, die durch

$$C(s) \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(s) \\ \sin(s)^2 \\ s-\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

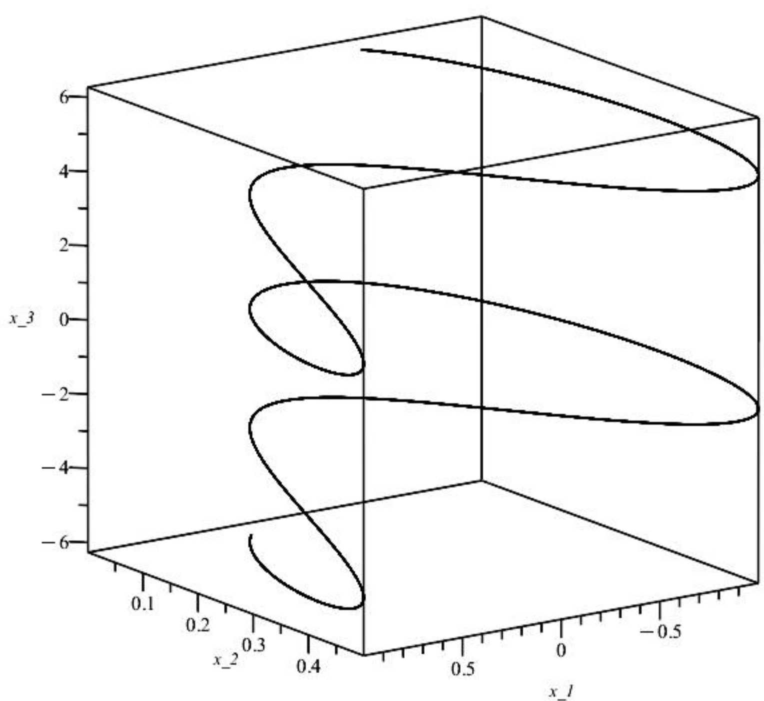
(b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungskreisradius $\rho(s)$.

(d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises.

*Lösung.*

Zunächst eine Skizze der Kurve $C(\mathbb{R})$ (in Aufgabe nicht verlangt):



(a) Es wird

$$C'(s) \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(s) \\ 2\sin(s)\cos(s) \\ 1-\cos(s)^2+\sin(s)^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s)\cos(s) \\ \sin(s)^2 \end{pmatrix} \;.$$

Also ist

$$|C'(s)| \;=\; \sqrt{\cos(s)^2+\sin(s)^2\cos(s)^2+\sin(s)^2\sin(s)^2} \;=\; \sqrt{\cos(s)^2+\sin(s)^2} \;=\; 1\;.$$

Daher ist $C$ eine normierte Parametrisierung.

(b) Gemäß (a) erhalten wir den Tangentenvektor $v(s) = C'(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s)\cos(s) \\ \sin(s)^2 \end{pmatrix}$.

Ferner wird

$$C''(s) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(2s) \\ \sin(2s) \end{pmatrix} \;.$$

Somit ist

$$|C''(s)| \;=\; \sqrt{(-\sin(s))^2+\cos(2s)^2+\sin(2s)^2} \;=\; \sqrt{1+\sin(s)^2}\;.$$

Insgesamt erhalten wir den Normalenvektor

$$n(s) \;=\; \frac{C''(s)}{|C''(s)|} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}}\begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(2s) \\ \sin(2s) \end{pmatrix} \;.$$

(c) Gemäß (b) erhalten wir die Krümmung $\kappa(s) = |C''(s)| = \sqrt{1+\sin(s)^2}$.

Damit wird der Krümmungskreisradius

$$\rho(s) \;=\; \frac{1}{\kappa(s)} \;=\; (1+\sin(s)^2)^{-1/2}\;.$$

(d) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ergibt sich mit $(\mathrm{b},\mathrm{c})$ zu

$$M(s) \;=\; C(s)+n(s)\cdot\rho(s) \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(s) \\ \sin(s)^2 \\ s-\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} + \tfrac{1}{1+\sin(s)^2}\begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(2s) \\ \sin(2s) \end{pmatrix} \;.$$

**Hausaufgabe 2**
Wir betrachten die Kurve in der $x_1$-$x_2$-Ebene, die durch

$$C(s) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^2 \\ s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in [-1,+1]$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

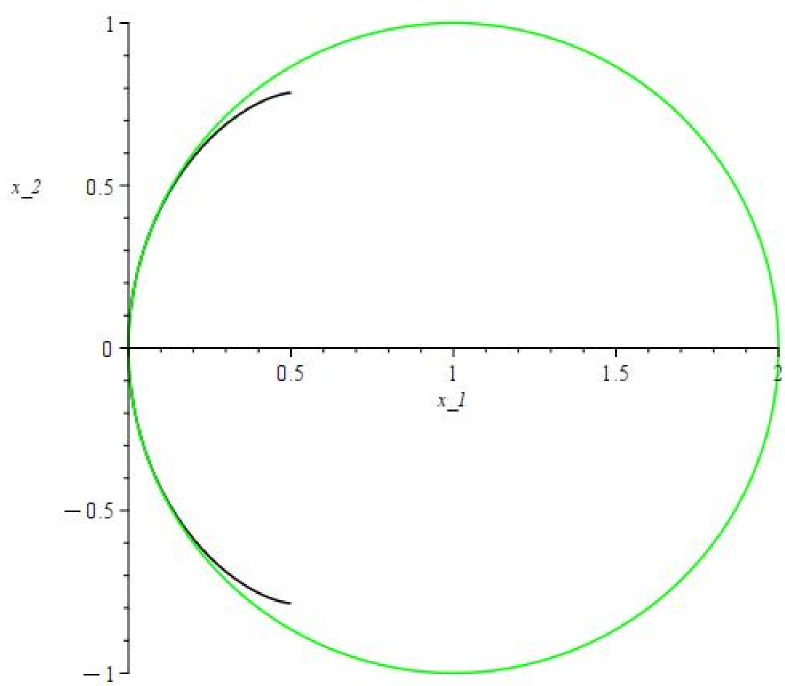
(b) Skizzieren Sie die Kurve in der $x_1$-$x_2$-Ebene unter Verwendung eines Taschenrechners.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$ für $s \in (-1,+1)$.

(d) Bestimmen Sie den Radius $\rho(s)$ und den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises für $s \in (-1,+1)$.

Zeichnen Sie den Krümmungskreis für $s = 0$ in die Skizze aus (b) ein.

*Lösung.*
Zunächst eine Skizze, in welche, wie in (b) verlangt, die Kurve $C([-1,+1])$ eingezeichnet ist (schwarz) und, wie in (d) verlangt, der Krümmungskreis für $s = 0$ eingezeichnet ist (grün). Die nötigen Berechnungen folgen.




(a) Es wird

$$C'(s) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2s \\ 1\cdot\sqrt{1-s^2}+s\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-s^2}}\cdot(-2s)+\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2s \\ \frac{1-s^2}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{-s^2}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} s \\ \sqrt{1-s^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist
$$|C'(s)| \;=\; \sqrt{s^2+(\sqrt{1-s^2})^2+0^2} \;=\; 1\,.$$
Daher ist $C$ eine normierte Parametrisierung.

(b) Skizze siehe oben.

(c) Gemäß (a) erhalten wir den Tangentenvektor $v(s) = C'(s) = \begin{pmatrix} s \\ \sqrt{1-s^2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird
$$C''(s) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}}\cdot(-2s) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2} \\ -s \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$
Also ist
$$|C''(s)| \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sqrt{(\sqrt{1-s^2})^2+(-s)^2+0^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,.$$
Insgesamt erhalten wir den Normalenvektor
$$n(s) \;=\; \frac{C''(s)}{|C''(s)|} \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2} \\ -s \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

(d) Der Krümmungskreisradius ist dank (c)
$$\rho(s) \;=\; \kappa(s)^{-1} \;=\; |C''(s)|^{-1} \;=\; \sqrt{1-s^2}\,.$$
Der Mittelpunkt der Krümmungskreises ist damit
$$M(s) \;=\; C(s)+n(s)\cdot\rho(s) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^2 \\ s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s) \\ 0 \end{pmatrix}+\sqrt{1-s^2}\begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2} \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-s^2 \\ -s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s) \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$
Insbesondere wird
$$\rho(0) \;=\; 1\,, \qquad M(0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$
Skizze siehe oben.