Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 2

Hausaufgabe 3

Wir betrachten wieder die Kurve, die durch

$$C(s) \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(s) \\ \sin(s)^2 \\ s-\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix}$$

normiert parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}$. Vgl. Hausaufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie den Binormalenvektor $b(s)$.

(b) Bestimmen Sie die Torsion $\tau(s)$.

(c) Bestimmen Sie $v'(s)$, $n'(s)$ und $b'(s)$.

(d) Verifizieren Sie die Frenet-Gleichungen im vorliegenenden Fall.

Lösung.
In Hausaufgabe 1 wurde bereits berechnet:

$$v(s) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s)\cos(s) \\ \sin(s)^2 \end{pmatrix}\;, \qquad n(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}}\begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix}\;, \qquad \kappa(s) \;=\; \sqrt{1+\sin(s)^2}\;.$$

(a) Es wird

$$\begin{aligned} b(s) \;&=\; v(s)\times n(s) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s)\cos(s) \\ \sin(s)^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}}\begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}}\begin{pmatrix} 2\sin(s)^2\cos(s)^2-\sin(s)^2(\cos(s)^2-\sin(s)^2) \\ -\sin(s)^3-2\sin(s)\cos(s)^2 \\ \cos(s)(\cos(s)^2-\sin(s)^2)+\sin(s)^2\cos(s) \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}}\begin{pmatrix} \sin(s)^2 \\ -\sin(s)(1+\cos(s)^2) \\ \cos(s)^3 \end{pmatrix}\;. \end{aligned}$$

(b) Es wird

$$\begin{aligned} n'(s) \;&=\; -\tfrac{1}{2}(1+\sin(s)^2)^{-3/2}\cdot 2\sin(s)\cos(s)\begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} + (1+\sin(s)^2)^{-1/2}\begin{pmatrix} -\cos(s) \\ -4\sin(s)\cos(s) \\ 2\cos(s)^2-2\sin(s)^2 \end{pmatrix} \\ &=\; (1+\sin(s)^2)^{-3/2}\left(\begin{pmatrix} \sin(s)^2\cos(s) \\ -\sin(s)\cos(s)^3+\sin(s)^3\cos(s) \\ -2\sin(s)^2\cos(s)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(s)-\cos(s)\sin(s)^2 \\ -4\sin(s)\cos(s)-4\sin(s)^3\cos(s) \\ 2\cos(s)^2-2\sin(s)^2+2\cos(s)^2\sin(s)^2-2\sin(s)^4 \end{pmatrix}\right) \\ &=\; (1+\sin(s)^2)^{-3/2}\begin{pmatrix} -\cos(s) \\ -\sin(s)\cos(s)(5+2\sin(s)^2) \\ 2-4\sin(s)^2-2\sin(s)^4 \end{pmatrix}\;. \end{aligned}$$

Also wird

$$
\begin{aligned}
& \tau(s) \\
= \;& \langle n'(s) | b(s) \rangle \\
= \;& \langle (1+\sin(s)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} -\cos(s) \\ -\sin(s)\cos(s)(5+2\sin(s)^2) \\ 2-4\sin(s)^2-2\sin(s)^4 \end{pmatrix} | (1+\sin(s)^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} \sin(s)^2 \\ -\sin(s)(1+\cos(s)^2) \\ \cos(s)^3 \end{pmatrix} \rangle \\
= \;& \tfrac{1}{(1+\sin(s)^2)^2} (-\cos(s)\sin(s)^2 + \sin(s)^2\cos(s)(5+2\sin(s)^2)(1+\cos(s)^2) + (2-4\sin(s)^2-2\sin(s)^4)\cos(s)^3) \\
= \;& \tfrac{\mathrm{c}}{(1+\mathrm{s}^2)^2} (-\mathrm{s}^2 + \mathrm{s}^2(5+2\mathrm{s}^2)(1+\mathrm{c}^2) + (2-4\mathrm{s}^2-2\mathrm{s}^4)\,\mathrm{c}^2) \\
= \;& \tfrac{\mathrm{c}}{(1+\mathrm{s}^2)^2} (-\mathrm{s}^2 + \mathrm{s}^2(5+2\mathrm{s}^2)(2-\mathrm{s}^2) + (2-4\mathrm{s}^2-2\mathrm{s}^4)(1-\mathrm{s}^2)) \\
= \;& \tfrac{\mathrm{c}}{(1+\mathrm{s}^2)^2} (-\mathrm{s}^2 + \mathrm{s}^2(10-5\mathrm{s}^2+4\mathrm{s}^2-2\mathrm{s}^4) + (2-4\mathrm{s}^2-2\mathrm{s}^4) - (2\mathrm{s}^2-4\mathrm{s}^4-2\mathrm{s}^6)) \\
= \;& \tfrac{\mathrm{c}}{(1+\mathrm{s}^2)^2} (-\mathrm{s}^2 + (10\mathrm{s}^2-\mathrm{s}^4-2\mathrm{s}^6) + (2-4\mathrm{s}^2-2\mathrm{s}^4) - (2\mathrm{s}^2-4\mathrm{s}^4-2\mathrm{s}^6)) \\
= \;& \tfrac{\mathrm{c}}{(1+\mathrm{s}^2)^2} (\mathrm{s}^4 + 3\mathrm{s}^2 + \mathrm{s}^4) \\
= \;& \tfrac{\mathrm{c}}{1+\mathrm{s}^2} (\mathrm{s}^2 + 2) \\
= \;& \cos(s)(1 + \tfrac{1}{1+\sin(s)^2})
\end{aligned}
$$

(c) Es wird

$$
v'(s) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} .
$$

Aus (b) entnehmen wir

$$
n'(s) \;=\; (1+\sin(s)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} -\cos(s) \\ -\sin(s)\cos(s)(5+2\sin(s)^2) \\ 2-4\sin(s)^2-2\sin(s)^4 \end{pmatrix} .
$$

Ferner wird

$$
\begin{aligned}
b'(s) \;=\;& -\tfrac{1}{2}(1+\sin(s)^2)^{-3/2} \cdot 2\sin(s)\cos(s) \begin{pmatrix} \sin(s)^2 \\ -\sin(s)(1+\cos(s)^2) \\ \cos(s)^3 \end{pmatrix} \\
& + (1+\sin(s)^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 2\sin(s)\cos(s) \\ -\cos(s)-\cos(s)^3+2\sin(s)^2\cos(s) \\ 3\cos(s)^2\sin(s) \end{pmatrix} \\
=\;& -\tfrac{1}{2}(1+\sin(s)^2)^{-3/2} \cdot 2\sin(s)\cos(s) \begin{pmatrix} \sin(s)^2 \\ -\sin(s)(1+\cos(s)^2) \\ \cos(s)^3 \end{pmatrix} \\
& + (1+\sin(s)^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 2\sin(s)\cos(s) \\ -2\cos(s)+3\sin(s)^2\cos(s) \\ -3\cos(s)^2\sin(s) \end{pmatrix} \\
=\;& (1+\sin(s)^2)^{-3/2} (\begin{pmatrix} -\sin(s)^3\cos(s) \\ \sin(s)^2\cos(s)(1+\cos(s)^2) \\ -\sin(s)\cos(s)^4 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} 2\sin(s)\cos(s)+2\sin(s)^3\cos(s) \\ -2\cos(s)+3\sin(s)^2\cos(s)-2\cos(s)\sin(s)^2+3\sin(s)^4\cos(s) \\ -3\cos(s)^2\sin(s)-3\cos(s)^2\sin(s)^3 \end{pmatrix}) \\
=\;& \cos(s)(1+\sin(s)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} 2\sin(s)+\sin(s)^3 \\ -2+3\sin(s)^2+2\sin(s)^4 \\ -\sin(s)\cos(s)^3-3\cos(s)\sin(s)-3\cos(s)\sin(s)^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos(s)(1+\sin(s)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} \sin(s)(2+\sin(s)^2) \\ (-1+2\sin(s)^2)(2+\sin(s)^2) \\ -2\sin(s)\cos(s)(2+\sin(s)^2) \end{pmatrix} \\
&= \cos(s)(1+\sin(s)^2)^{-3/2}(2+\sin(s)^2) \begin{pmatrix} \sin(s) \\ -1+2\sin(s)^2 \\ -2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}
$$

(d) Es ist

$$
\kappa(s)\cdot n(s) \ = \ \sqrt{1+\sin(s)^2}\cdot \tfrac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}} \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} \ ,
$$

was gemäß (c) dasselbe ist wie $v'(s)$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
& -\kappa(s)\cdot v(s) + \tau(s)\cdot b(s) \\
= \ & -\sqrt{1+\sin(s)^2}\cdot \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s)\cos(s) \\ \sin(s)^2 \end{pmatrix} + \cos(s)(1+\tfrac{1}{1+\sin(s)^2})\cdot \tfrac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}} \begin{pmatrix} \sin(s)^2 \\ -\sin(s)(1+\cos(s)^2) \\ \cos(s)^3 \end{pmatrix} \\
= \ & (1+\sin(s)^2)^{-3/2}\cdot(- \begin{pmatrix} (1+\sin(s)^2)^2\cos(s) \\ (1+\sin(s)^2)^2\sin(s)\cos(s) \\ (1+\sin(s)^2)^2\sin(s)^2 \end{pmatrix} + \cos(s)(2+\sin(s)^2) \begin{pmatrix} \sin(s)^2 \\ \sin(s)(-2+\sin(s)^2) \\ \cos(s)^3 \end{pmatrix}) \\
= \ & (1+\sin(s)^2)^{-3/2}\cdot \begin{pmatrix} (-1-2\sin(s)^2-\sin(s)^4+2\sin(s)^2+\sin(s)^4)\cos(s) \\ \sin(s)\cos(s)(-1-2\sin(s)^2-\sin(s)^4-4+2\sin(s)^2-2\sin(s)^2+\sin(s)^4) \\ -\sin(s)^2-2\sin(s)^4-\sin(s)^6+(2+\sin(s)^2)(1-\sin(s)^2)^2 \end{pmatrix} \\
= \ & (1+\sin(s)^2)^{-3/2}\cdot \begin{pmatrix} -\cos(s) \\ -\sin(s)\cos(s)(5+2\sin(s)^2) \\ -\sin(s)^2-2\sin(s)^4-\sin(s)^6+2-4\sin(s)^2+2\sin(s)^4+\sin(s)^2-2\sin(s)^4+\sin(s)^6 \end{pmatrix} \\
= \ & (1+\sin(s)^2)^{-3/2}\cdot \begin{pmatrix} -\cos(s) \\ -\sin(s)\cos(s)(5+2\sin(s)^2) \\ 2-4\sin(s)^2-2\sin(s)^4 \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}
$$

was gemäß (b,c) dasselbe ist wie $n'(s)$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
-\tau(s)\cdot n(s) \ &= \ -\cos(s)(1+\tfrac{1}{1+\sin(s)^2})\cdot\tfrac{1}{\sqrt{1+\sin(s)^2}} \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s)^2-\sin(s)^2 \\ 2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} \\
&= \ \cos(s)(1+\sin(s)^2)^{-3/2}(2+\sin(s)^2) \begin{pmatrix} \sin(s) \\ -1+2\sin(s)^2 \\ -2\sin(s)\cos(s) \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}
$$

was gemäß (c) dasselbe ist wie $b'(s)$.

Hausaufgabe 4

Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(t) \;=\; \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $t \in \mathbb{R}$.

(a) Rechnen Sie nach: Jeder Kurvenpunkt liegt auf

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 = 1 + x_2^2\,,\; x_1 \geqslant 1,\; x_3 = 0 \right\} .$$

Skizzieren Sie die Kurve.

(b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(t)$, den Normalenvektor $n(t)$, den Krümmungskreisradius $\rho(t)$ und den Mittelpunkt des Krümmungskreises $M(t)$.

(c) Fügen Sie den Krümmungskreis an der Stelle $t = 0$ der Skizze aus (a) hinzu.

Lösung.

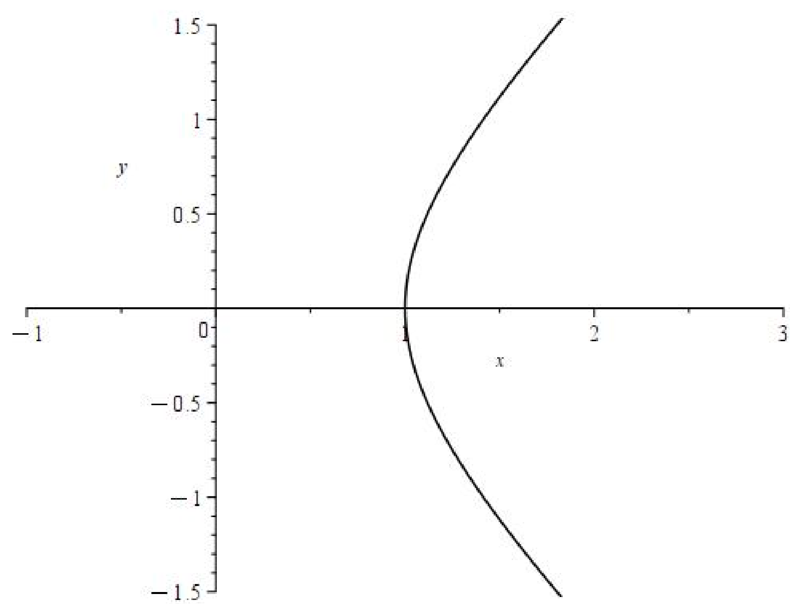
(a) Es liegt jeder Kurvenpunkt $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix}$ auf der beschriebenen Menge, da

$$\begin{aligned} C_1(t)^2 &= \cosh(t)^2 \;=\; 1 + \sinh(t)^2 \;=\; 1 + C_2(t)^2 \\ C_1(t) &= \cosh(t) \;\geqslant\; 1 \\ C_3(t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Für die Ungleichung kann man etwa $\cosh(1) = 1$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x) > 0$ für $x > 0$ und $\cosh(-x) = \cosh(x)$ für $x > 0$ anführen.

Es parametrisiert C einen Hyperbelast.

Skizze:



(b) Es ist $C'(t) = \left(\begin{smallmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Folglich wird

$$|C'(t)| \;=\; \sqrt{\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2} \;=\; \cosh(2t)^{1/2}\,.$$

Wir erhalten den Tangentenvektor

$$v(t) \;=\; \frac{1}{|C'(t)|} C'(t) \;=\; \cosh(2t)^{-1/2} \left(\begin{smallmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\,.$$

Es ist $C''(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Folglich wird

$$|C'(t) \times C''(t)| \;=\; |\left(\begin{smallmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)| \;=\; |\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh(t)^2 - \cosh(t)^2 \end{smallmatrix}\right)| \;=\; |\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)| \;=\; 1\,.$$

Ferner wird

$$|C'(t)|' \;=\; (\cosh(2t)^{1/2})' \;=\; \frac{1}{2}(\cosh(2t)^{-1/2}) \cdot 2\sinh(2t) \;=\; (\cosh(2t)^{-1/2}) \cdot \sinh(2t)\,.$$

Wir erhalten den Normalenvektor

$$\begin{aligned} n(t) \;&=\; \tfrac{1}{|C'(t) \times C''(t)|}(|C'(t)|C''(t) - |C'(t)|'C'(t)) \\ &=\; \cosh(2t)^{1/2} \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - (\cosh(2t)^{-1/2}) \cdot \sinh(2t) \left(\begin{smallmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &=\; \cosh(2t)^{-1/2}((\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2) \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - 2\sinh(t)\cosh(t) \left(\begin{smallmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) \\ &=\; \cosh(2t)^{-1/2} \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t)(\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2 - 2\sinh(t)^2) \\ \sinh(t)(\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2 - 2\cosh(t)^2) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &=\; \cosh(2t)^{-1/2} \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ -\sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Der Krümmungskreisradius ergibt sich zu

$$\rho(t) \;=\; \frac{|C'(t)|^3}{|C'(t) \times C''(t)|} \;=\; \cosh(2t)^{3/2}\,.$$

Der Krümmungskreismittelpunkt ergibt sich zu

$$\begin{aligned} M(t) \;&=\; C(t) + \rho(t) \cdot n(t) \\ &=\; \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \cosh(2t)^{3/2}\cosh(2t)^{-1/2} \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ -\sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &=\; \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \cosh(2t) \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) \\ -\sinh(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\,. \end{aligned}$$

(c) Mit (b) wird $\rho(0) = \cosh(2 \cdot 0)^{3/2} = 1$ und

$$M(0) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} \cosh(0) \\ \sinh(0) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \cosh(2 \cdot 0) \left(\begin{smallmatrix} \cosh(0) \\ -\sinh(0) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\,.$$

Wir tragen diesen Krümmungskreis in rot in die Skizze aus (a) ein: