Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 3

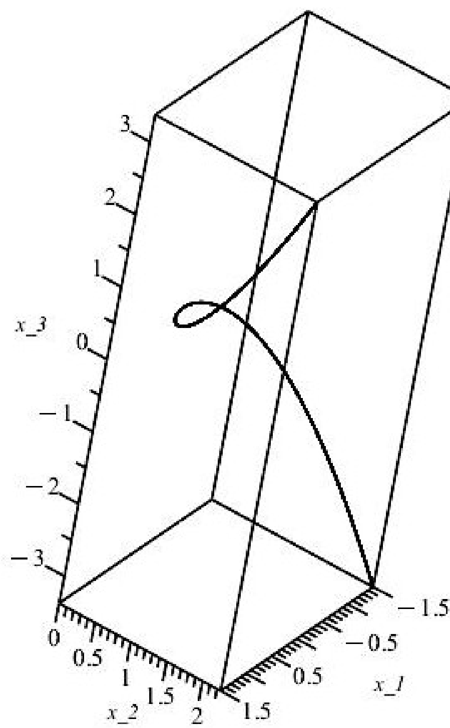
Hausaufgabe 5 Wir betrachten die von $C(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve, wobei $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $C'(t)$, $C''(t)$ und $C'''(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ für $t \neq 0$.

(c) Bestimmen Sie die Torsion $\tau(t)$ für $t \neq 0$.

Lösung. Zunächst eine Skizze der von C parametrisierten Kurve (in Aufgabe nicht verlangt).



(a) Es ist $C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}$. Es ist $C''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 12t^2 \end{pmatrix}$. Es ist $C'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 24t \end{pmatrix}$.

(b) Es ist

$$|C'(t)| \;=\; |\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}| \;=\; |t| \cdot |\begin{pmatrix} 2 \\ 3t \\ 4t^2 \end{pmatrix}| \;=\; |t| \cdot \sqrt{4 + 9t^2 + 16t^4}\;.$$

Es ist

$$|C'(t) \times C''(t)| \;=\; |\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 12t^2 \end{pmatrix}| \;=\; |\begin{pmatrix} 12t^4 \\ -16t^3 \\ 6t^2 \end{pmatrix}| \;=\; 2t^2 |\begin{pmatrix} 6t^2 \\ -8t \\ 3 \end{pmatrix}| \;=\; 2t^2 \sqrt{9 + 64t^2 + 36t^4}\;.$$

Also ist

$$\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^2}|C'(t) \times C''(t)| = \frac{2t^2\sqrt{9+64t^2+36t^4}}{|t|^3(4+9t^2+16t^4)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{9+64t^2+36t^4}}{|t|(4+9t^2+16t^4)^{3/2}} \,.$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \tfrac{1}{|C'(t)\times C''(t)|^2}\det(C'(t), C''(t), C'''(t)) \\
&= \tfrac{1}{4t^4(9+64t^2+36t^4)}\det\begin{pmatrix} 2t & 2 & 0 \\ 3t^2 & 6t & 6 \\ 4t^3 & 12t^2 & 24t \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{4t\cdot 3}{4t^4(9+64t^2+36t^4)}\det\begin{pmatrix} 2t & 2 & 0 \\ t^2 & 2t & 2 \\ t^2 & 3t & 6 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{4t\cdot 3\cdot t\cdot 2}{4t^4(9+64t^2+36t^4)}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ t & 2t & 2 \\ t & 3t & 6 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{4t\cdot 3\cdot t\cdot 2}{4t^4(9+64t^2+36t^4)}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & t & 2 \\ t & 2t & 6 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{4t\cdot 3\cdot t\cdot 2}{4t^4(9+64t^2+36t^4)}\cdot 2t \\
&= \tfrac{12}{t(9+64t^2+36t^4)} \,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 6 Wir betrachten die Parametrisierung

$$\Phi \;:\; \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \;\mapsto\; \mathbb{R}^3 \;:\; \binom{t}{\varphi} \mapsto \Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(t)\cos(\varphi) \\ \cosh(t)\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix} \;.$$

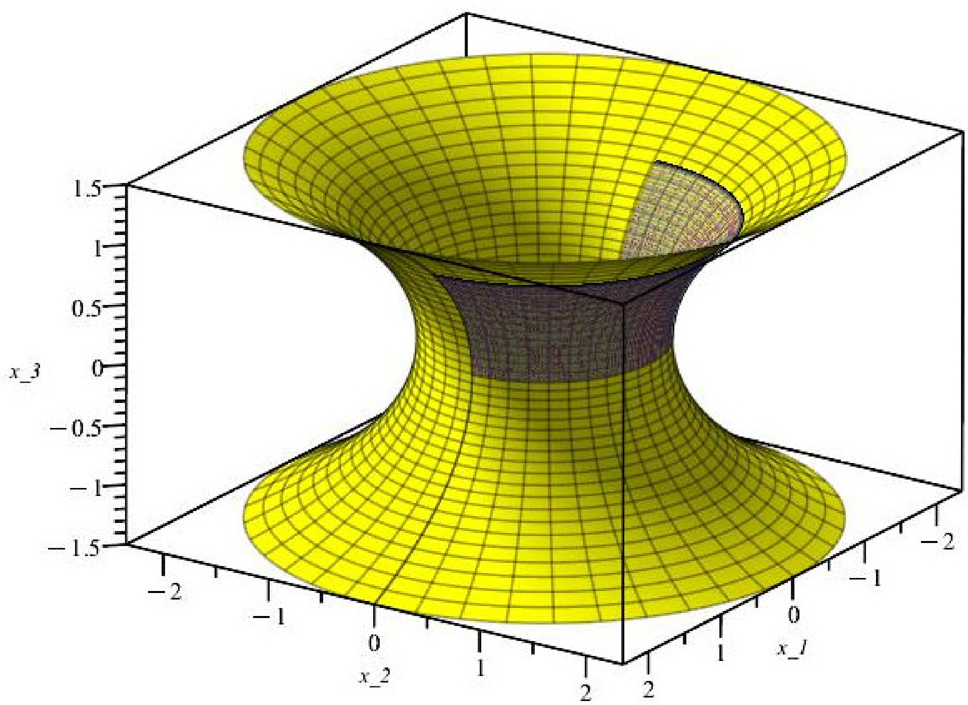
Diese beschreibt die Rotationsfläche, bei welcher der Graph $x_1 = \cosh(x_3)$ aus der x_1-x_3-Ebene um die x_3-Achse rotiert.

(a) Bestimmen Sie E, F und G.

(b) Sei $c(\varphi) = \binom{1}{\varphi}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$. Sei $C := \Phi \circ c$.
Verwenden Sie (a), um die Länge des Halbkreises $C([0, \pi])$ zu bestimmen.

(c) Sei $J = [0, 1] \times [0, \pi]$. Verwenden Sie (a), um die Fläche von $\Phi(J)$ zu bestimmen.

Lösung.
Zunächst eine Skizze der von Φ parametrisierten Fläche (in Aufgabe nicht verlangt). Der zu berechnende Flächeninhalt ist markiert. Am oberen Rand dieses Flächenstücks ist die Kurve hervorgehoben, deren Länge zu berechnen ist.



(a) Es ist

$$\begin{aligned} E &= |\Phi_t|^2 \\ &= \left| \begin{pmatrix} \sinh(t)\cos(\varphi) \\ \sinh(t)\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \sinh(t)^2\cos(\varphi)^2 + \sinh(t)^2\sin(\varphi)^2 + 1 \\ &= \sinh(t)^2 + 1 \\ &= \cosh(t)^2 \;. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} F &= \langle \Phi_t | \Phi_\varphi \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} \sinh(t)\cos(\varphi) \\ \sinh(t)\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -\cosh(t)\sin(\varphi) \\ \cosh(t)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \\ &= -\sinh(t)\cos(\varphi)\sinh(t)\sin(\varphi) + \sinh(t)\sin(\varphi)\cosh(t)\cos(\varphi) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} G &= |\Phi_\varphi|^2 \\ &= | \begin{pmatrix} -\cosh(t)\sin(\varphi) \\ \cosh(t)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} |^2 \\ &= \cosh(t)^2 \sin(\varphi)^2 + \cosh(t)^2 \cos(\varphi)^2 \\ &= \cosh(t)^2\,. \end{aligned}$$

(b) Die Länge von $C([0,\pi])$ ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sqrt{c'(\varphi)^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \int_0^\pi \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} \cosh(1)^2 & 0 \\ 0 & \cosh(1)^2 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \int_0^\pi \sqrt{\cosh(1)^2}\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \pi\cosh(1)\,. \end{aligned}$$

Hierbei waren E, F, G bei $c(\varphi) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \varphi \end{smallmatrix}\right)$ auszuwerten.

(c) Die Fläche von $\Phi(J)$ ist

$$\begin{aligned} & \iint_J \sqrt{\det \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \int_0^\pi \int_0^1 \sqrt{\det \begin{pmatrix} \cosh(t)^2 & 0 \\ 0 & \cosh(t)^2 \end{pmatrix}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \int_0^\pi \int_0^1 \cosh(t)^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \int_0^\pi \int_0^1 (\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}))^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \int_0^\pi \int_0^1 \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2t} + 2 + \mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \int_0^\pi [\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + 2t - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t})]_{t=0}^{t=1}\,\mathrm{d}\varphi \\ = & \tfrac{\pi}{4}(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}) \\ = & \tfrac{\pi}{4}(\sinh(2) + 2) \end{aligned}$$