Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 4

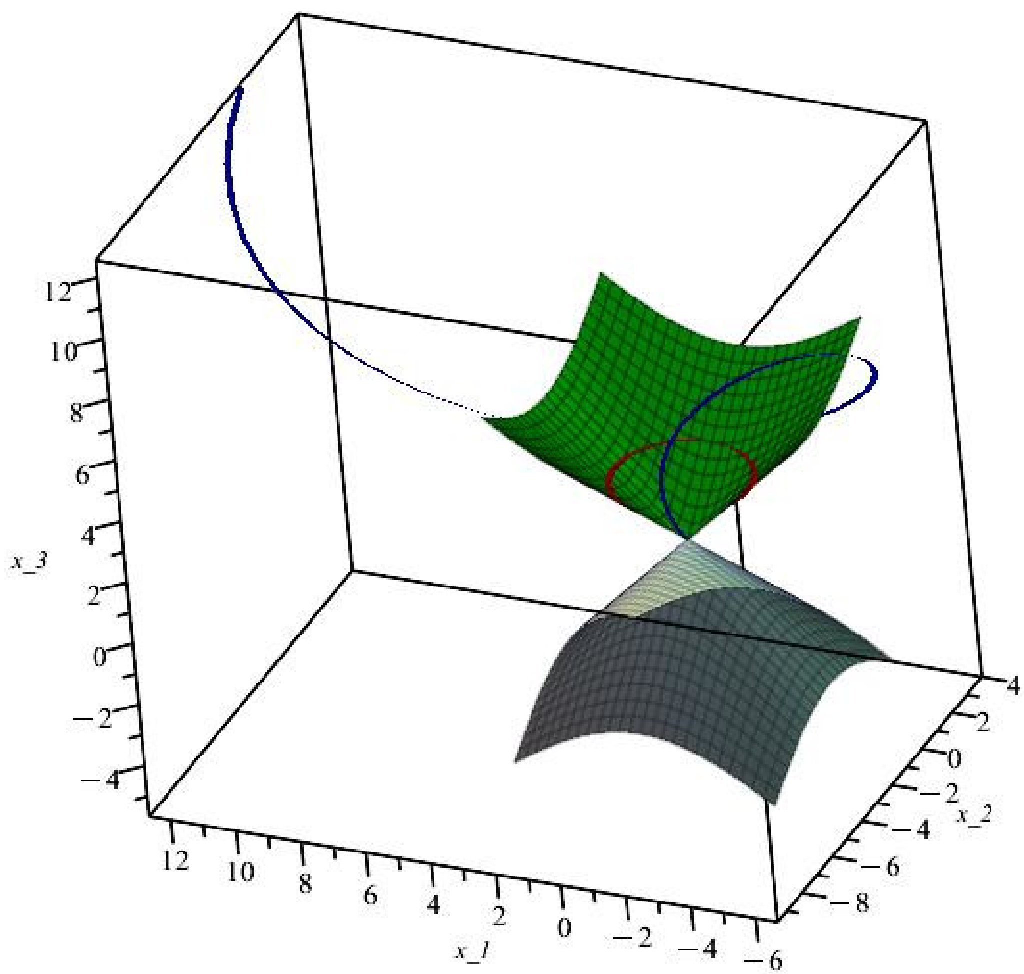
Hausaufgabe 7 Wir betrachten wieder den Doppelkegel $D = \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \}$ aus Platzaufgabe 6, parametrisiert durch

$$\Phi \;:\; \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\begin{smallmatrix} z \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \;\mapsto\; \Phi(z, \varphi) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ z \end{smallmatrix}\right) \;.$$

(a) Sei $c(t) = \left(\begin{smallmatrix} 2t \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $C(t) := \Phi(c(t))$.
Sei $d(t) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $D(t) := \Phi(d(t))$.
Bestimmen Sie $t_1,\, t_2 \,\in\, [0, 2\pi]$ mit $c(t_1) = d(t_2)$.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ den Cosinus des Winkels, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen.

Lösung.
Zunächst eine Skizze des Doppelkegels, zusammen mit der von $\Phi \circ c$ parametrisierten Kurve, in blau, und der von $\Phi \circ d$ parametrisierten Kurve, in rot (in Aufgabe nicht verlangt).



(a) Es wird

$$C(t) \;=\; \Phi(c(t)) \;=\; \Phi(2t,t) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2t\cos(t) \\ 2t\sin(t) \\ 2t \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Es wird

$$D(t) \;=\; \Phi(d(t)) \;=\; \Phi(2,t) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Es ist $c(1) = \binom{2}{1} = d(1)$, und somit $t_1 = 1 = t_2$.

(b) Wir berechnen

$$\Phi_z(z,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix},\; \Phi_\varphi(z,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} -z\sin(\varphi) \\ z\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} E \;&=\; \langle \Phi_z(z,\varphi) | \Phi_z(z,\varphi) \rangle \;=\; \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 + 1^2 \;=\; 2 \;, \\ F \;&=\; \langle \Phi_z(z,\varphi) | \Phi_\varphi(z,\varphi) \rangle \;=\; \cos(\varphi)\cdot(-z\sin(\varphi)) + \sin(\varphi)\cdot z\cos(\varphi) + 1\cdot 0 \;=\; 0 \;, \\ G \;&=\; \langle \Phi_\varphi(z,\varphi) | \Phi_\varphi(z,\varphi) \rangle \;=\; (-z\sin(\varphi))^2 + (z\cos(\varphi))^2 \;=\; z^2 \;. \end{aligned}$$

Kurz,

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} \;.$$

Speziell wird am Punkt $\binom{z}{\varphi} = c(t_1) = d(t_2) = \binom{2}{1}$

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Ferner ist $c'(t) = \binom{2}{1}$ und $d'(t) = \binom{0}{1}$. Also ist auch $c'(t_1) = c'(1) = \binom{2}{1}$ und $d'(t_2) = d'(1) = \binom{0}{1}$.

Der Cosinus des Winkels α, den die von C parametrisierte Kurve und die von D parametrisierte Kurve in $C(t_1) = D(t_2)$ einschließen, wird also

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \;&=\; \frac{c'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_2)}{\sqrt{c'(t_1)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot c'(t_1)} \cdot \sqrt{d'(t_2)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot d'(t_2)}} \\ &=\; \frac{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \cdot \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}} \\ &=\; \frac{4}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{4}} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \;. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 8

(a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+2v^2 \end{pmatrix}$, wobei $u,\ v \in \mathbb{R}$.

Man skizziere die Schnitte mit den Koordinatenebenen in ein Koordinatensystem.

Was für eine Fläche S wird von Φ parametrisiert? Ist S rotationssymmetrisch bezüglich der x_3-Achse?

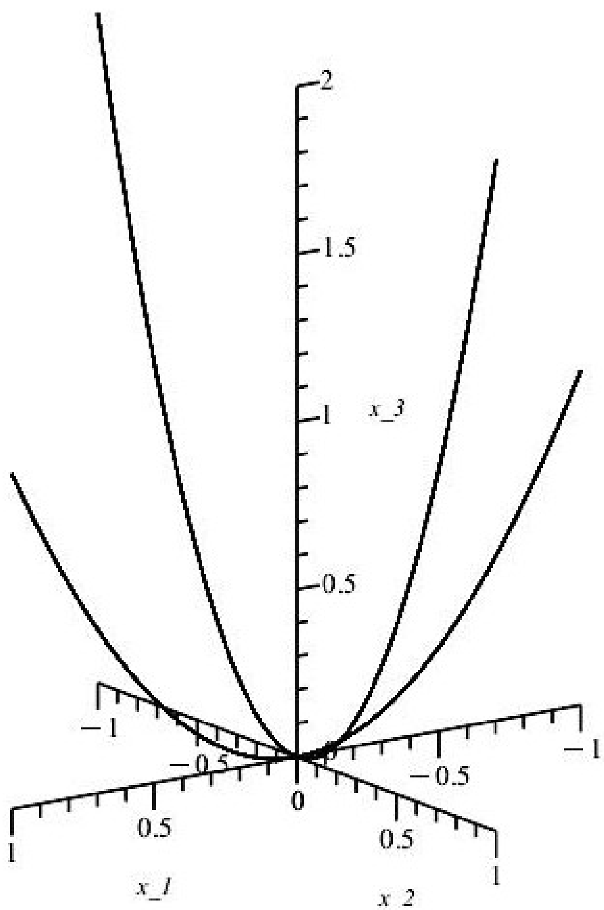
(b) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung Φ.

(c) Man bestimme die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} für $i,\ j,\ k \in \{1,2\}$ mittels E, F und G.

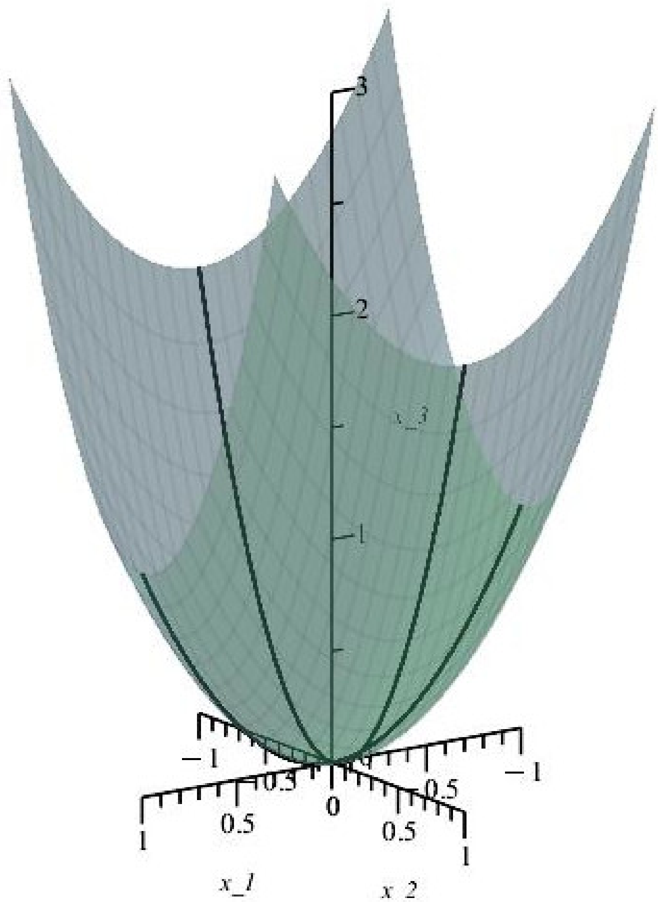
(d) Man überprüfe die definierenden Gleichungen für die Christoffelsymbole.

Lösung.

(a) Die Schnitte mit den Koordinatenebenen:



Die Schnitte mit den Koordinatenebenen mitsamt S:



Es ist S ein elliptisches Paraboloid, das von der Gleichung $-2x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3 = 0$ beschrieben wird.

(b) Es ist

$$\Phi_u \;=\; \Phi_u(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \qquad \Phi_v \;=\; \Phi_v(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4v \end{pmatrix}.$$

Also wird

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle \;=\; 1 + 4u^2 , \\ F &= \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle \;=\; 8uv , \\ G &= \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle \;=\; 1 + 16v^2 , \end{aligned}$$

kurz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 8uv \\ 8uv & 1+16v^2 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{(1+4u^2)(1+16v^2)-(8uv)^2} \begin{pmatrix} 1+16v^2 & -8uv \\ -8uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 1+16v^2 & -8uv \\ -8uv & 1+4u^2 \end{pmatrix}.$$

Mit (a) wird

$$\begin{aligned} E_u &= 8u \\ E_v &= 0 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_u &= 8v \\ F_v &= 8u\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_u &= 0 \\ G_v &= 32v\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 1+16v^2 & -8uv \\ -8uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4u \\ 8v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 4u \\ 8v \end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 \\ \Gamma_{21}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 1+16v^2 & -8uv \\ -8uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 1+16v^2 & -8uv \\ -8uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8u \\ 16v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 8u \\ 16v \end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

(d) Es wird

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -4v \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Es wird

$$\Phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\ , \qquad \Phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};, \qquad \Phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\ .$$

Wir erhalten folgendes.

Als erstes ist

$$\begin{aligned} \Phi_{uu} - \Gamma_{11}^1\Phi_u - \Gamma_{11}^2\Phi_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4u}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} - \frac{8v}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+8u^2+32v^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4u \\ 0 \\ 8u^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8v \\ 32v^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} -4u \\ -8v \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{1+4u^2+16v^2} (\Phi_u \times \Phi_v)\ . \end{aligned}$$

Somit ist diese definierende Gleichung mit $h_{11} = \frac{2}{1+4u^2+16v^2}$ erfüllt.

Als zweites ist

$$\Phi_{uv} - \Gamma_{12}^1\Phi_u - \Gamma_{12}^2\Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\ .$$

Somit ist diese definierende Gleichung mit $h_{12} = 0$ erfüllt.

Als drittes ist

$$\begin{aligned}
\Phi_{vv} - \Gamma_{22}^1 \Phi_u - \Gamma_{22}^2 \Phi_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{8u}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} - \frac{16v}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4v \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4+16u^2+64v^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8u \\ 0 \\ 16u^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 16v \\ 64v^2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} -8u \\ -16v \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{1+4u^2+16v^2} (\Phi_u \times \Phi_v) \,.
\end{aligned}$$

Somit ist diese definierende Gleichung mit $h_{22} = \frac{4}{1+4u^2+16v^2}$ erfüllt.