Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 5

Hausaufgabe 9 Wir betrachten wieder die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+2v^2 \end{pmatrix}$ der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche S, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Sei $c(t) = \binom{t}{0}$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf S?

(b) Sei $d(t) = \binom{t}{t}$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Parametrisiert $\Phi(d(t))$ eine Geodäte auf S?

Lösung.
Aus Hausaufgabe 8 entnehmen wir:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 8uv \\ 8uv & 1+16v^2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8u & 8v \\ 8v & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 8u \\ 8u & 32v \end{pmatrix} \\
\Gamma^1 &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 4u & 0 \\ 0 & 8u \end{pmatrix} \\
\Gamma^2 &= \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 8v & 0 \\ 0 & 16v \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

(a) Es ist $c = \binom{t}{0}$, $c' = \binom{c_1'}{c_2'} = \binom{1}{0}$, $c'' = \binom{0}{0}$.

Sei nun $\binom{u}{v} = c(t) = \binom{t}{0}$.

Es wird

$$c'^{\mathrm{T}} \Gamma^1 c' = \frac{1}{1+4t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4t & 0 \\ 0 & 8t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4t}{1+4t^2}$$

und $\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ferner wird

$$c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+4t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1+4t^2$$

und

$$c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8t .$$

Somit wird

$$\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}} \Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}} \Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c_1' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c_2' \right) \cdot c' \\
= \; & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t/(1+4t^2) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+4t^2} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\, 8t \cdot 1 + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= \; & \begin{pmatrix} 4t/(1+4t^2) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+4t^2} \cdot 4t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= \; & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Also parametrisiert $\Phi(c(t))$ eine Geodäte auf S.

(b) Es ist $d = \binom{t}{t}$, $d' = \begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \end{pmatrix} = \binom{1}{1}$, $d'' = \binom{0}{0}$.

Sei nun $\binom{u}{v} = d(t) = \binom{t}{t}$.

Es wird

$$d'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 d' \;=\; \frac{1}{1+20t^2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4t & 0\\ 0 & 8t\end{pmatrix}\binom{1}{1} \;=\; \frac{12t}{1+20t^2}$$

und

$$d'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 d' \;=\; \frac{1}{1+20t^2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8t & 0\\ 0 & 16t\end{pmatrix}\binom{1}{1} \;=\; \frac{24t}{1+20t^2}\ .$$

Ferner wird

$$d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} d' \;=\; \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+4t^2 & 8t^2\\ 8t^2 & 1+16t^2\end{pmatrix}\binom{1}{1} \;=\; 2+36t^2$$

und

$$d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{pmatrix} d' \;=\; \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8t & 8t\\ 8t & 0\end{pmatrix}\binom{1}{1} \;=\; 24t$$

und

$$d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{pmatrix} d' \;=\; \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 8t\\ 8t & 32t\end{pmatrix}\binom{1}{1} \;=\; 48t\ .$$

Somit wird

$$\begin{aligned}
& d'' + \begin{pmatrix} d'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 d' \\ d'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 d' \end{pmatrix} - \frac{1}{d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} d'}\left(d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} d'' + \tfrac{1}{2}\, d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_u & F_u\\ F_u & G_u\end{pmatrix} d' \cdot d_1' + \tfrac{1}{2}\, d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E_v & F_v\\ F_v & G_v\end{pmatrix} d' \cdot d_2'\right) \cdot d' \\
=\; & \binom{0}{0} + \begin{pmatrix} 12t/(1+20t^2) \\ 24t/(1+20t^2) \end{pmatrix} - \frac{1}{2+36t^2}\left(d'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\binom{0}{0} + \tfrac{1}{2}\, 24t \cdot 1 + \tfrac{1}{2}\, 48t \cdot 1\right) \cdot \binom{1}{1} \\
=\; & \begin{pmatrix} 12t/(1+20t^2) \\ 24t/(1+20t^2) \end{pmatrix} - \frac{1}{2+36t^2} \cdot 36t \cdot \binom{1}{1}\ .
\end{aligned}$$

Zum Beispiel wird dies für $t = 1$ zu

$$\begin{pmatrix} 12/(1+20) \\ 24/(1+20) \end{pmatrix} - \frac{1}{2+36} \cdot 36 \cdot \binom{1}{1} \;=\; \frac{1}{7}\binom{1}{2} - \frac{18}{19}\binom{1}{1} \;\neq\; \binom{0}{0}\ ,$$

da $\binom{1}{2}$, $\binom{1}{1}$ linear unabhängig sind und die Koeffizienten nicht beide null sind.

Also parametrisiert $\Phi(c(t))$ keine Geodäte auf S.

Hausaufgabe 10

Wie in Hausaufgabe 6 betrachten wir die Parametrisierung

$$\Phi \;:\; \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \;\mapsto\; \mathbb{R}^3 \;:\; \binom{t}{\varphi} \mapsto \Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(t)\cos(\varphi) \\ \cosh(t)\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix} .$$

Diese beschreibt die Rotationsfläche S, bei welcher der Graph $x_1 = \cosh(x_3)$ aus der x_1-x_3-Ebene um die x_3-Achse rotiert.

(a) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole.

(b) Sei $c(\varphi) = \binom{0}{\varphi}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Parametrisiert $\Phi(c(\varphi))$ eine Geodäte auf S?

Lösung.

(a) Es ist $\Phi_t = \begin{pmatrix} \sinh(t)\cos(\varphi) \\ \sinh(t)\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist $\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\cosh(t)\sin(\varphi) \\ \cosh(t)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird

$$E \;=\; \langle \Phi_t | \Phi_t \rangle \;=\; \sinh(t)^2\cos(\varphi)^2 + \sinh(t)^2\sin(\varphi)^2 + 1^2 \;=\; \sinh(t)^2 + 1^2 \;=\; \cosh(t)^2 .$$

Es wird

$$F \;=\; \langle \Phi_t | \Phi_\varphi \rangle \;=\; \sinh(t)\cos(\varphi)(-\cosh(t)\sin(\varphi)) + \sinh(t)\sin(\varphi)\cosh(t)\cos(\varphi) + 1 \cdot 0 \;=\; 0 .$$

Es wird

$$G \;=\; \cosh(t)^2\sin(\varphi)^2 + \cosh(t)^2\cos(\varphi)^2 \;=\; \cosh(t)^2 .$$

Also ist $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(t)^2 & 0 \\ 0 & \cosh(t)^2 \end{pmatrix} = \cosh(t)^2 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \cosh(t)^{-2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Es wird $\left(\begin{smallmatrix} E_t & F_t \\ F_t & G_t \end{smallmatrix}\right) = 2\cosh(t)\sinh(t) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Es wird $\left(\begin{smallmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Also wird

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac12 E_t \\ F_t - \frac12 E_\varphi \end{pmatrix} &&= \cosh(t)^{-2} \binom{\cosh(t)\sinh(t)}{0} &&= \cosh(t)^{-1}\sinh(t) \binom{1}{0} \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac12 E_\varphi \\ \frac12 G_t \end{pmatrix} &&= \cosh(t)^{-2} \binom{0}{\cosh(t)\sinh(t)} &&= \cosh(t)^{-1}\sinh(t) \binom{0}{1} \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} F_\varphi - \frac12 G_t \\ \frac12 G_\varphi \end{pmatrix} &&= \cosh(t)^{-2} \binom{-\cosh(t)\sinh(t)}{0} &&= \cosh(t)^{-1}\sinh(t) \binom{-1}{0} .
\end{aligned}$$

Also ist $\Gamma^1 = \cosh(t)^{-1}\sinh(t) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\Gamma^2 = \cosh(t)^{-1}\sinh(t) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Es ist $c = \binom{0}{\varphi}$, $c' = \binom{0}{1}$, $c'' = \binom{0}{0}$. Also wird

$$\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} \;-\; \frac{1}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'' + \tfrac12 c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_t & F_t \\ F_t & G_t \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c'_1 + \tfrac12 c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c'_2 \right) \cdot c' \\
=\;& \binom{0}{0} + \begin{pmatrix} -\cosh(0)^{-1}\sinh(0) \\ 0 \end{pmatrix} \;-\; \frac{1}{\cosh(0)^{-2}} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \binom{0}{0} + \tfrac12 c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_t & F_t \\ F_t & G_t \end{smallmatrix}\right) c' \cdot 0 + \tfrac12 c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c'_2 \right) \cdot c' \\
=\;& \binom{0}{0} .
\end{aligned}$$

Somit parametrisiert $\Phi(c(\varphi))$ eine Geodäte auf S.