Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 6

Hausaufgabe 11

Sei

$$\Phi \;:\; \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \;\mapsto\; \Phi(u,v) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ uv \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Sei $S = \Phi(\mathbb{R}^2)$ die von Φ parametrisierte Fläche.

Man bestimme drei Geodäten auf S, die durch den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ verlaufen.

Der Verifikation ist mittels Lemma aus §2.3 durchzuführen.

Lösung.

Es ist $\Phi_u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{smallmatrix}\right)$ und $\Phi_v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{smallmatrix}\right)$.

Also ist $E = \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle = 1 + v^2$, $F = \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle = uv$, $G = \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle = 1 + u^2$.

Somit ist $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{smallmatrix}\right)$.

Ferner ist $\left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ v & 2u \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2v & u \\ u & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir berechnen die Christoffel-Symbole.

Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ v - \frac{1}{2}\cdot 2v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2v \\ \frac{1}{2}\cdot 2u \end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} v+u^2v-uv^2 \\ -uv^2+u+uv^2 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{smallmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} u - \frac{1}{2}\cdot 2u \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Also ist $\Gamma^1 = \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\Gamma^2 = \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(\begin{smallmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Geodäte 1. Sei $c(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\Phi(c(0)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir behaupten, daß $\Phi(c(t)) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Geodäte auf S parametrisiert.

Dies folgt schon, da es eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ ist. Wir verifizieren es mittels Lemma aus §2.3.

Es wird $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = c = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $c' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $c'' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und also

$$\begin{aligned} & c'' + \left(\begin{smallmatrix} c'^{\mathrm{T}} \Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}} \Gamma^2 c' \end{smallmatrix}\right) \;-\; \frac{1}{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'' + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c'_1 + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) c' \cdot c'_2 \right) \cdot c' \\ =\;\; & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;-\; \tfrac{1}{1+0^2} \left(c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \tfrac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) 1 + \tfrac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) c' \cdot 0 \right) \cdot c' \\ =\;\; & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;. \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

Geodäte 2. Sei $c(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\Phi(c(0)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir behaupten, daß $\Phi(c(t)) = \begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}$ eine Geodäte auf S parametrisiert.

Dies folgt schon, da es eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ ist. Wir verifizieren es mittels Lemma aus §2.3.

Es wird $\binom{u}{v} = c = \binom{0}{t}$, $c' = \binom{0}{1}$, $c'' = \binom{0}{0}$ und also

$$\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm T}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm T}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} \;-\; \frac{1}{c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)c'} \left(c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)c'' + \tfrac12\, c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E_u&F_u\\F_u&G_u\end{smallmatrix}\right)c'\cdot c_1' + \tfrac12\, c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E_v&F_v\\F_v&G_v\end{smallmatrix}\right)c'\cdot c_2'\right)\cdot c' \\
= \;& \binom{0}{0} + \binom{0}{0} \;-\; \tfrac{1}{1+0^2}\left(c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)\binom{0}{0} + \tfrac12\, c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E_u&F_u\\F_u&G_u\end{smallmatrix}\right)c'\cdot 0 + \tfrac12\,(0\;1)\left(\begin{smallmatrix}2t&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\binom{0}{1}\cdot 1\right)\cdot c' \\
= \;& \binom{0}{0}\;.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

Geodäte 3. Sei $c(t) = \binom{t}{t}$. Dann ist $\Phi(c(0)) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Wir behaupten, daß $\Phi(c(t)) = \begin{pmatrix}t\\t\\t^2\end{pmatrix}$ eine Geodäte auf S parametrisiert.

Es wird $\binom{u}{v} = c = \binom{t}{t}$, $c' = \binom{0}{1}$, $c'' = \binom{0}{0}$.

Bei $c(t)$ ist $\Gamma^1 = \frac{1}{1+2t^2}\left(\begin{smallmatrix}0&t\\t&0\end{smallmatrix}\right)$ und $\Gamma^2 = \frac{1}{1+2t^2}\left(\begin{smallmatrix}0&t\\t&0\end{smallmatrix}\right)$.

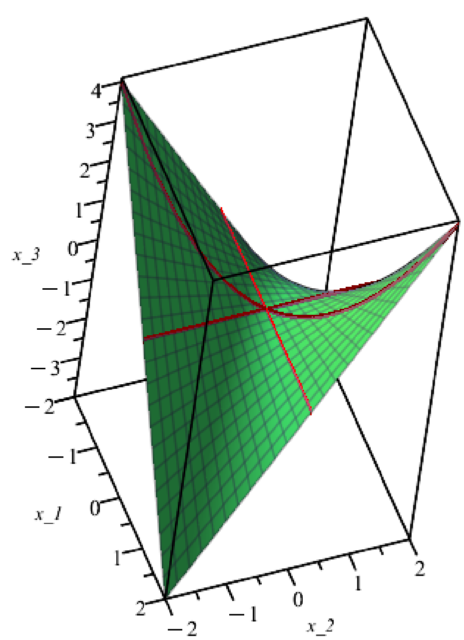
Bei $c(t)$ ist $\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1+t^2 & t^2\\ t^2 & 1+t^2\end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix}E_u&F_u\\F_u&G_u\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&t\\t&2t\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}E_v&F_v\\F_v&G_v\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2t&t\\t&0\end{smallmatrix}\right)$.

Es wird

$$\begin{aligned}
& c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm T}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm T}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} \;-\; \frac{1}{c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)c'} \left(c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)c'' + \tfrac12\, c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E_u&F_u\\F_u&G_u\end{smallmatrix}\right)c'\cdot c_1' + \tfrac12\, c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E_v&F_v\\F_v&G_v\end{smallmatrix}\right)c'\cdot c_2'\right)\cdot c' \\
= \;& \binom{0}{0} + \tfrac{1}{1+2t^2}\binom{2t}{2t} \;-\; \tfrac{1}{2+4t^2}\left(c'^{\mathrm T}\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)\binom{0}{0} + \tfrac12\,(1\;1)\left(\begin{smallmatrix}0&t\\t&2t\end{smallmatrix}\right)\binom{1}{1}\cdot 1 + \tfrac12\,(1\;1)\left(\begin{smallmatrix}2t&t\\t&0\end{smallmatrix}\right)\binom{1}{1}\cdot 1\right)\cdot\binom{1}{1} \\
= \;& \tfrac{1}{1+2t^2}\binom{2t}{2t} \;-\; \tfrac{1}{2+4t^2}\left(\tfrac12\cdot 4t + \tfrac12\cdot 4t\right)\cdot\binom{1}{1} \\
= \;& \binom{0}{0}\;.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

Skizze von S mit den drei hier angegebenen Geodäten in rot (nicht verlangt):



Hausaufgabe 12 Wir betrachten wieder die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+2v^2 \end{pmatrix}$ der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche S, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ von S an jeder Stelle.

(b) An welcher Stelle ist $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ maximal?

(c) Welche Werte von $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ treten auf S auf? Man bestimme hierzu die Menge ihrer Werte

$$\{\, \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,v) \mid \tbinom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,\} \,.$$

Lösung.
Eine Skizze von S ist bei der Lösung zu Hausaufgabe 8 zu sehen.

(a) Gemäß Hausaufgabe 8.(d) haben wir $h_{11} = \frac{2}{1+4u^2+16v^2}$, $h_{12} = 0$ und $h_{22} = \frac{2}{1+4u^2+16v^2}$. Wegen Symmetrie ist auch $h_{21} = 0$. Also ist

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \,.$$

Somit wird

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,v) = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \det\left(\frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{8}{(1+4u^2+16v^2)^2} \,.$$

(b) Es wird $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,v) = \frac{8}{(1+4u^2+16v^2)^2}$ maximal, wenn $1+4u^2+16v^2$ minimal wird. Dies ist bei $\binom{u}{v} = \binom{0}{0}$ der Fall.

(c) Laut (b) ist der maximale Wert von $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,v)$ gegeben durch $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(0,0) = 8$.

Ferner ist $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,v) = \frac{8}{(1+4u^2+16v^2)^2} > 0$ für $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.

Somit ist der Wertebereich von $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ enthalten im Intervall $(0,8]$.

Sei nun umgekehrt $a \in (0,8]$ vorgegeben. Wir wollen zeigen, daß a als Wert von $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ auftritt.

Dazu suchen wir ein $u \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,0) = \frac{8}{(1+4u^2)^2} \overset{!}{=} a$.

Wir formen um zu $1+4u^2 \overset{!}{=} \sqrt{\frac{8}{a}}$. Dabei ist $\frac{8}{a} \in [1,+\infty)$, da $a \in (0,8]$.

Wir können weiter umformen zu $u \overset{!}{=} \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\frac{8}{a}} - 1}$. Dabei war $v = 0$.

Z.B. an diesen Stellen ist also die Gaußsche Krümmung gleich a.

Somit ist

$$\{\, \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,v) \mid \tbinom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,\} = (0,8] \,.$$