Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 7

Hausaufgabe 13 Wie in Hausaufgabe 7 betrachten wir Parametrisierung

$$\Phi \;:\; [0,2\pi]\times\mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} \;\mapsto\; \Phi(\varphi,z) \;=\; \begin{pmatrix} z\cos(\varphi)\\ z\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix} \;.$$

des Doppelkegels D.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right)$ und $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$.

(b) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix}t\\ 2\end{smallmatrix}\right)$ für $t\in[0,2\pi]$.

An der Stelle $t_0=\pi$ bestimme man $\kappa\cdot\cos(\nu)$.

Man bestimme hieraus ν. Man vergleiche mit dem Wert von ν aus einer direkten geometrischen Überlegung.

(c) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix}t\\ t\end{smallmatrix}\right)$ für $t\in[0,2\pi]$.

An der Stelle $t_0=\pi$ bestimme man $\kappa\cdot\cos(\nu)$.

Lösung.
Wir kürzen ab: $c_\varphi=\cos(\varphi)$, $s_\varphi=\sin(\varphi)$, etc.

(a) Es ist $\Phi_\varphi = \left(\begin{smallmatrix}-zs_\varphi\\ zc_\varphi\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ und $\Phi_z = \left(\begin{smallmatrix}c_\varphi\\ s_\varphi\\ 1\end{smallmatrix}\right)$.

Also wird $E=\langle\Phi_\varphi|\Phi_\varphi\rangle = z^2$, $F=\langle\Phi_\varphi|\Phi_z\rangle=0$, $G=\langle\Phi_z|\Phi_z\rangle=2$. Somit ist

$$\left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}z^2 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right) \;.$$

Es ist $\mathfrak{n}=\Phi_\varphi\times\Phi_z = \left(\begin{smallmatrix}zc_\varphi\\ zs_\varphi\\ -z\end{smallmatrix}\right)$.

Es ist $\Phi_{\varphi\varphi} = \left(\begin{smallmatrix}-zc_\varphi\\ -zs_\varphi\\ 0\end{smallmatrix}\right)$, $\Phi_{\varphi z} = \begin{pmatrix}-s_\varphi\\ c_\varphi\\ 0\end{pmatrix}$, $\Phi_{zz} = \left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ 0\end{smallmatrix}\right)$.

Es ist $\langle\Phi_{\varphi\varphi}|\mathfrak{n}\rangle = -z^2$, $\langle\Phi_{\varphi z}|\mathfrak{n}\rangle=0$, $\langle\Phi_{zz}|\mathfrak{n}\rangle=0$.

Also ist $\left(\begin{smallmatrix}L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{pmatrix}-z^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{|z|\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-z^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = -\frac{|z|}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Insbesondere ist $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \frac{1}{EG-F^2}\det\left(\begin{smallmatrix}L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2z^2}\det\!\left(-\frac{|z|}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\right) = 0$.

(b) Es ist $c'(t) := \left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ für $t\in[0,2\pi]$. Es ist $\varphi=t$ und $z=2$.

Es folgt $c'(\pi)^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right)c'(\pi) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(-\frac{|2|}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right) = -\sqrt{2}$.

Ferner ist $c'(\pi)^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)c'(\pi) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right) = 4$.

Es folgt

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; -\frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

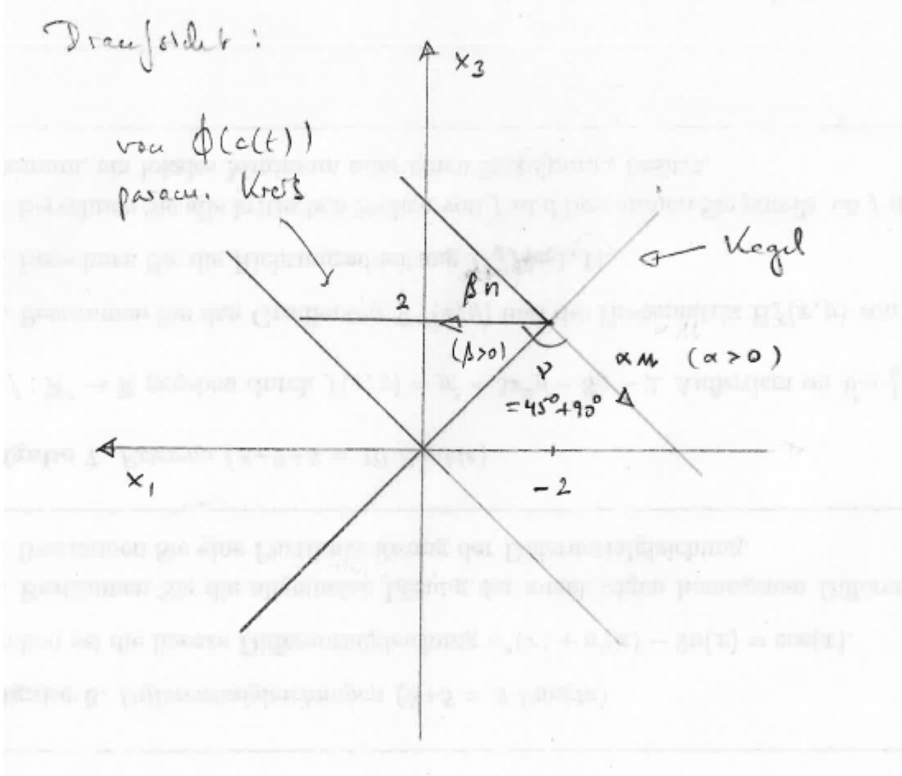
Es parametrisiert $\Phi(c(t)) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \\ 2 \end{pmatrix}$ einen Kreis mit Radius 2. Dieser hat überall Krümmung $\kappa = \frac{1}{2}$. Folglich ist

$$\cos(\nu) \;=\; -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\kappa^{-1} \;=\; -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Es folgt $\nu = \frac{3}{4}\pi$.

Tatsächlich zeigt $\mathfrak{n} = \Phi_\varphi \times \Phi_z = \begin{pmatrix} zc_\varphi \\ zs_\varphi \\ -z \end{pmatrix}$ aus dem Kegel nach außen, senkrecht zu seiner Oberfläche.

Der Normalenvektor n des parametrisierten Kreises zeigt hingegen zum Kreismittelpunkt. Also schließen n und $\mathfrak{n}$ tatsächlich einen Winkel von $\nu = 90° + 45° = \frac{3}{4}\pi$ ein.



(c) Es ist $c'(t) := \binom{1}{1}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Es ist $\varphi = t$ und $z = t$.

Bei $t_0 = \pi$ ist also $\varphi = \pi$ und $z = \pi$.

Es folgt $c'(\pi)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c'(\pi) = (1\;1)\left(-\frac{|\pi|}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\binom{1}{1} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Ferner ist $c'(\pi)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'(\pi) = (1\;1)\begin{pmatrix} \pi^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\binom{1}{1} = \pi^2 + 2$.

Es folgt

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; \frac{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\pi^2+2} \;=\; -\frac{\pi}{\sqrt{2}(\pi^2+2)}\,.$$

Hausaufgabe 14 Wir betrachten wieder die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+2v^2 \end{pmatrix}$ der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche S, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.
Sei $c(t) = \binom{t}{1}$ für $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

(b) Man bestimme $\kappa \cdot \cos(\nu)$.

(c) Wir betrachten die Stelle $t_0 = 0$.

Man bestimme κ durch direkte Verwendung von $C(t) = \Phi(c(t))$. Man bestimme ν näherungsweise zeichnerisch. Man vergleiche den so erhaltenen Wert für $\kappa \cdot \cos(\nu)$ mit dem in (b) erhaltenen Wert.

Lösung.

(a) Aus Hausaufgabe 8 entnehmen wir $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 8uv \\ 8uv & 1+16v^2 \end{pmatrix}$.

Aus Hausaufgabe 12 entnehmen wir $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Es ist $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = 1 + 4u^2 + 16v^2$. Also ist

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \sqrt{EG-F^2} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

(b) Es ist $\binom{u}{v} = c(t_0) = c(0) = \binom{0}{1}$.

Es ist $c'(t_0) = \binom{1}{0}$. Somit wird

$$\kappa \cdot \cos(\nu) = \frac{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} c}{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c} = \frac{L}{E} = \frac{\frac{2}{\sqrt{1+4\cdot 0^2+16\cdot 1^2}}}{1 + 4 \cdot 0^2} = \frac{2}{\sqrt{17}} .$$

(c) Es wird $C(t) = \Phi(c(t)) = \Phi(t,1) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t^2+2\cdot 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t^2+2 \end{pmatrix}$.

Es wird $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$. Es wird $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es wird $C'(t) \times C''(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

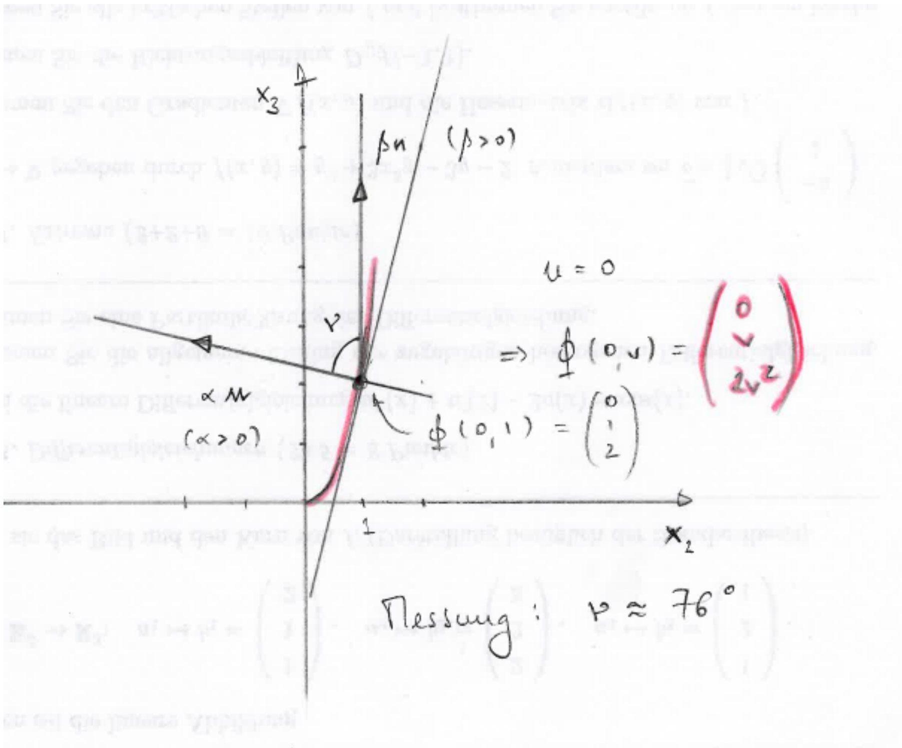
Mit §1.4 wird also

$$\kappa = \frac{1}{|C'(t)|^3} \cdot |C'(t) \times C''(t)| = \frac{1}{(1+4t^2)^{3/2}} \cdot 2 .$$

Bei $t = 0$ ist also

$$\kappa = 2 .$$

Mit Hausaufgabe 8.(d) ist $\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -2u \\ -4v \\ 1 \end{pmatrix}$, zeigt also nach oben.



Zeichnerisch ergibt sich $\nu \approx 76°$. Also

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;\approx\; 2\cos(76°) \;\approx\; 0{,}484 \; .$$

Dies vergleichen wir mit dem Resultat aus (b):

$$\kappa \cdot \cos(\nu) \;=\; \frac{2}{\sqrt{17}} \;\approx\; 0{,}485 \; .$$