Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 8

Hausaufgabe 15 Wie in Hausaufgabe 13 betrachten wir die Parametrisierung

$$\Phi \;:\; [0,2\pi]\times\mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} \;\mapsto\; \Phi(\varphi,z) \;=\; \begin{pmatrix} z\cos(\varphi)\\ z\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}\;.$$

des Doppelkegels D.

(a) Man bestimme die Weingarten-Matrix W unter Verwendung von Hausaufgabe 13.(a).

(b) Man bestimme für $\begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi\\ 2\end{pmatrix}$ Hauptkrümmungsvektoren und Hauptkrümmungen.

(c) In der Situation von (b) parametrisiere man für jeden Hauptkrümmungsvektor jeweils einen zugehörigen Normalschnitt. Man bestimme die Hauptkrümmungen abermals, nun unter Verwendung dieser Normalschnitte.

Lösung.

(a) Mit Hausaufgabe 13 erhalten wir die Weingarten-Matrix zu

$$\mathrm{W} \;=\; \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}z^2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left(-\tfrac{|z|}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) \;=\; -\tfrac{1}{|z|\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\;.$$

(b) Bei $\begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi\\ 2\end{pmatrix}$ ist $P_0 := \Phi(\pi,2) = \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ und

$$\mathrm{W} \;=\; -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\;.$$

Als Hauptkrümmungsvektoren erhalten wir Eigenvektoren von W, nämlich

$$v_1 \;:=\; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{mit Eigenwert } -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}$$

und

$$v_2 \;:=\; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{mit Eigenwert } 0.$$

(c) Aus Hausaufgabe 13 entnehmen wir $\mathfrak{n} = \Phi_\varphi \times \Phi_z = \begin{pmatrix} zc_\varphi\\ zs_\varphi\\ -z\end{pmatrix}$. Bei P_0 ist $\begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi\\ 2\end{pmatrix}$ und also $\mathfrak{n} = \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$.

Zu v_2. Sei $H = \{\, \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\,\}$.

Es liegt die Gerade $\{\, P_0 + r\mathfrak{n} \mid r\in\mathbb{R}\,\} = \{\, \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -2\end{pmatrix} \mid r\in\mathbb{R}\,\}$ in H.

Sei

$$c(t) \;:=\; \begin{pmatrix}\pi\\ t\end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Für $t_0 = 2$ ist $c(t_0) = \binom{\pi}{2}$ und also $\Phi(c(t_0)) = P_0$.

Es ist $c'(t_0) = \binom{0}{1} = v_2$.

Es ist $C(t) := \Phi(c(t)) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ in H. Also liegt die von C parametrisierte Kurve in $H \cap D$.

Die Krümmung der von $C(t)$ parametrisierten Kurve in $t_0 = 2$ ist

$$\kappa \;=\; \tfrac{1}{|C'(t_0)|^3} |C'(t_0) \times C''(t_0)| \;=\; 0\,,$$

da $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Also ist auch $\kappa \cdot \cos(\nu) = 0$. Dies bestätigt die Hauptkrümmung 0 aus (b).

Zu v_1. Sei $H = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 - x_1 = 4 \}$. Es ist also H die zum Ortsvektor von P_0 senkrechte Ebene, die P_0 enthält.

Es liegt die Gerade $\{ P_0 + r\mathfrak{n} \,|\, r \in \mathbb{R} \} = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \,|\, r \in \mathbb{R} \}$ in H, da auf dieser Geraden $x_3 - x_1 = (-2r + 2) - (-2r - 2) = 4$ ist für $r \in \mathbb{R}$.

Wenn wir nun eine Kurve parametrisieren sollten, für welche das Bild in $D \cap H$ liegt, muß für $\Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} zc_\varphi \\ zs_\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auch

$$4 \;=\; x_3 - x_1 \;=\; z - zc_\varphi \;=\; z(1 - c_\varphi)$$

gelten. Also ist $z = \frac{4}{1-c_\varphi}$. Somit können wir

$$c(t) \;:=\; \begin{pmatrix} t \\ 4(1-c_t)^{-1} \end{pmatrix}$$

setzen, für $t \in (0, 2\pi)$. Hierbei sei wieder $c_t := \cos(t)$ abgekürzt. Für $t_0 = \pi$ ist $c(t_0) = \binom{\pi}{2}$ und also $\Phi(c(t_0)) = P_0$.

Es ist $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4s_t(1-c_t)^{-2} \end{pmatrix}$ und also $c'(t_0) = \binom{1}{0} = v_1$.

Es ist

$$C(t) \;:=\; \Phi(c(t)) \;=\; \Phi(t, 4(1-c_t)^{-1}) \;=\; \begin{pmatrix} 4c_t(1-c_t)^{-1} \\ 4s_t(1-c_t)^{-1} \\ 4(1-c_t)^{-1} \end{pmatrix}\,,$$

und dabei ist $4(1-c_t)^{-1} - 4c_t(1-c_t)^{-1} = 4(1-c_t)(1-c_t)^{-1} = 4$, und also liegt $C(t)$ in H. So wurde $c(t)$ ja auch konstruiert. Also liegt die von C parametrisierte Kurve in $H \cap D$.

Es ist

$$C'(t) \;=\; \begin{pmatrix} -4s_t(1-c_t)^{-1} - 4c_t s_t(1-c_t)^{-2} \\ 4c_t(1-c_t)^{-1} - 4s_t^2(1-c_t)^{-2} \\ -4s_t(1-c_t)^{-2} \end{pmatrix}\,.$$

Es ist

$$C''(t) \;=\; \begin{pmatrix} -4c_t(1-c_t)^{-1} + 8s_t^2(1-c_t)^{-2} + c_t(-4c_t(1-c_t)^{-2} + 8s_t^2(1-c_t)^{-3}) \\ -4s_t(1-c_t)^{-1} - 8c_t s_t(1-c_t)^{-2} + s_t(-4c_t(1-c_t)^{-2} + 8s_t^2(1-c_t)^{-3}) \\ -4c_t(1-c_t)^{-2} + 8s_t^2(1-c_t)^{-3} \end{pmatrix}\,.$$

Es ist

$$C'(t_0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Es ist

$$C''(t_0) \;=\; \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Es ist $C'(t_0) \times C''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Krümmung der von $C(t)$ parametrisierten Kurve in $t_0 = \pi$ ist

$$\kappa = \frac{1}{|C'(t_0)|^3} |C'(t_0) \times C''(t_0)| = \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} .$$

Der Anschauung entnehmen wir, daß $n(t_0) = n(2)$ und $\mathfrak{n}(\pi, 2)$ nicht in dieselbe Richtung zeigen; $n(1)$ zeigt in Richtung des Krümmungskreismittelpunkts der Schnittkurve (einer Parabel), $\mathfrak{n}(\pi, 2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ zeigt am Doppelkegel nach außen. Also ist $\cos(\nu) = -1$. Somit ist $\kappa \cdot \cos(\nu) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Dies bestätigt die Hauptkrümmung $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ aus (b).

Hausaufgabe 16 Wir betrachten wieder die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+2v^2 \end{pmatrix}$ der in Hausaufgabe 8 betrachteten Fläche S, wobei $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Man bestimme die Weingarten-Matrix W unter Verwendung von Hausaufgabe 14.(a).

(b) Man bestimme für $\binom{u}{v} = \binom{1}{1}$ Hauptkrümmungsvektoren und Hauptkrümmungen.

(c) Man bestimme im Punkt $\Phi(1,1)$ die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ und die mittlere Krümmung $\mathrm{K}_{\text{mittel}}$ von S.

Lösung.

(a) Dank Hausaufgabe 14.(a) ist $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 8uv \\ 8uv & 1+16v^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4u^2+16v^2} \begin{pmatrix} 1+16v^2 & -8uv \\ -8uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{(1+4u^2+16v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+16v^2 & -16uv \\ -8uv & 2+8u^2 \end{pmatrix} .$$

(b) Für $\binom{u}{v} = \binom{1}{1}$ wird

$$\mathrm{W} = \frac{2}{21^{3/2}} \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} .$$

Wir behandeln die Matrix $A := \frac{21^{3/2}}{2} \mathrm{W} = \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(\mu) = \det \begin{pmatrix} 17-\mu & -16 \\ -8 & 10-\mu \end{pmatrix} = (17-\mu)(10-\mu) - 128 = \mu^2 - 27\mu + 42$. Die Eigenwerte sind $\mu_1 = \frac{1}{2}(27 - \sqrt{27^2 - 4 \cdot 42}) = \frac{1}{2}(27 - \sqrt{561})$ und $\mu_2 = \frac{1}{2}(27 + \sqrt{561})$.

Es ist $\det \begin{pmatrix} 17-\mu_1 & -16 \\ -8 & 10-\mu_1 \end{pmatrix} = 0$. Also sind die Zeilen dieser Matrix linear abhängig. Daher erhalten wir einen zugehörigen Eigenvektor $2 \binom{16}{17-\mu_1} = \binom{32}{7+\sqrt{561}}$ von A.

Es ist $\det \begin{pmatrix} 17-\mu_2 & -16 \\ -8 & 10-\mu_2 \end{pmatrix} = 0$. Also sind die Zeilen dieser Matrix linear abhängig. Daher erhalten wir einen zugehörigen Eigenvektor $2 \binom{16}{17-\mu_2} = \binom{32}{7-\sqrt{561}}$ von A.

Gefunden wurden also:

Der Hauptkrümmungsvektor $v_1 = \binom{32}{7+\sqrt{561}}$ mit zugehöriger Hauptkrümmung

$$\lambda_1 := \frac{2}{21^{3/2}} \mu_1 = \frac{1}{21^{3/2}} (27 - \sqrt{561}) .$$

Der Hauptkrümmungsvektor $v_2 = \binom{32}{7-\sqrt{561}}$ mit zugehöriger Hauptkrümmung

$$\lambda_2 := \frac{2}{21^{3/2}} \mu_2 = \frac{1}{21^{3/2}} (27 + \sqrt{561}) .$$

(c) Die Gaußsche Krümmung im Punkt $\Phi(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \det \mathrm{W} = \frac{4}{21^3} \det \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} = \frac{4}{21^3} \cdot 42 = \frac{8}{21^2} = \frac{8}{441} .$$

Die mittlere Krümmung im Punkt $\Phi(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist mit (b)

$$\mathrm{K}_{\text{mittel}} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{21^{3/2}}(27 - \sqrt{561}) + \frac{1}{21^{3/2}}(27 + \sqrt{561})\right) = \frac{27}{21^{3/2}} .$$