Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 9

Hausaufgabe 17 Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0,\pi]$, ein Ellipsoid; vgl. Beispiel in §3.2.

(a) Nebenrechnung: Man bestimme die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{t}{\sqrt{4-3t^2}}$.

(b) Man bestätige Gauß-Bonnet, Version 2, im vorliegenden Fall.

(c) Man bestätige das Theorema egregium im vorliegenden Fall.

Lösung.

(a) Mit der Quotientenregel wird

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{t}{\sqrt{4-3t^2}} &= \frac{1\cdot(4-3t^2)^{1/2} - t\cdot\frac{1}{2}(4-3t^2)^{-1/2}\cdot(-6t)}{4-3t^2} \\ &= \frac{(4-3t^2) - t\cdot\frac{1}{2}(-6t)}{(4-3t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{4}{(4-3t^2)^{3/2}} \ . \end{aligned}$$

(b) Unser Ellipsoid S hat Lochanzahl $g = 0$. Es ist also $\iint_S \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O = (2-2\cdot 0)\cdot 2\pi = 4\pi$ nach Gauß-Bonnet, Version 2.

Zur Bestätigung dieser Aussage im vorliegenden Fall berechnen wir $\iint_S \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O$.

Zunächst erinnern wir uns aus §3.2 an

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \ = \ -\begin{pmatrix} 2\sin(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \ .$$

Es wird

$$\begin{aligned} |\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta| &= \sqrt{4\sin(\vartheta)^4\cos(\varphi)^2 + 4\sin(\vartheta)^4\sin(\varphi)^2 + \sin(\vartheta)^2\cos(\vartheta)^2} \\ &= \sqrt{4\sin(\vartheta)^4 + \sin(\vartheta)^2\cos(\vartheta)^2} \\ &= \sqrt{4\sin(\vartheta)^2\sin(\vartheta)^2 + 4\sin(\vartheta)^2\cos(\vartheta)^2 - 3\sin(\vartheta)^2\cos(\vartheta)^2} \\ &= \sin(\vartheta)\sqrt{4-3\cos(\vartheta)^2} \ . \end{aligned}$$

Hierfür hätte man auch $|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta| = \sqrt{EG-F^2} = \sin(\vartheta)\sqrt{4-3\cos(\vartheta)^2}$ aus §3.2 zitieren können.

Gemäß Beispiel in §3.2 ist

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} \ = \ \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(\varphi,\vartheta) \ = \ \frac{4}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^2} \ .$$

Also wird, mit Substitution $t = \cos(\vartheta)$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\vartheta} = -\sin(\vartheta)$, $\mathrm{d}t = -\sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\,\mathrm{d}O &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(\varphi,\vartheta)\cdot|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta|\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \tfrac{4}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^2}\cdot\sin(\vartheta)\sqrt{4-3\cos(\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \tfrac{4}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^2}\cdot\sin(\vartheta)\sqrt{4-3\cos(\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= -2\pi\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \tfrac{4}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^{3/2}}\cdot(-\sin(\vartheta))\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= -2\pi\int_{t=1}^{t=-1} \tfrac{4}{(4-3t^2)^{3/2}}\;\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\int_{t=-1}^{t=1} \tfrac{4}{(4-3t^2)^{3/2}}\;\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{(a)}}{=} 2\pi\left[\tfrac{t}{\sqrt{4-3t^2}}\right]_{t=-1}^{t=1} \\
&= 2\pi(1-(-1)) \\
&= 4\pi\;.
\end{aligned}$$

Dies bestätigt Gauß-Bonnet, Version 2, im vorliegenden Fall.

(c) Gemäß Beispiel in §3.2 ist

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} \;=\; \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(\varphi,\vartheta) \;=\; \tfrac{4}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^2}\;.$$

Dies soll mit dem Theorema egregium bestätigt werden.

Gemäß Beispiel in §3.2 ist

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 4-3\cos(\vartheta)^2 \end{smallmatrix}\right)\;.$$

und also $EG - F^2 = \sin(\vartheta)^2(4-3\cos(\vartheta)^2)$. Ferner werden

Desweiteren ist $E_\vartheta = 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) = \sin(2\vartheta)$ und $E_{\vartheta\vartheta} = 2\cos(2\vartheta)$.

Ferner ist $G_\vartheta = -6\cos(\vartheta)(-\sin(\vartheta)) = 3\sin(2\vartheta)$.

Wir kürzen $c_\vartheta := \cos(\vartheta)$ und $s_\vartheta := \sin(\vartheta)$ ab, etc. Es wird

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_{\text{Gauß}} &= \tfrac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix} F_{\varphi\vartheta}-\frac{1}{2}G_{\varphi\varphi}-\frac{1}{2}E_{\vartheta\vartheta} & \frac{1}{2}E_\varphi & F_\varphi-\frac{1}{2}E_\vartheta \\ F_\vartheta-\frac{1}{2}G_\varphi & E & F \\ \frac{1}{2}G_\vartheta & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_\vartheta & \frac{1}{2}G_\varphi \\ \frac{1}{2}E_\vartheta & E & F \\ \frac{1}{2}G_\varphi & F & G \end{pmatrix}\right) \\
&= \tfrac{1}{s_\vartheta^4(4-3c_\vartheta^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}\cdot 2c_{2\vartheta} & \frac{1}{2}0 & 0-\frac{1}{2}s_{2\vartheta} \\ 0-\frac{1}{2}0 & s_\vartheta^2 & 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 3s_{2\vartheta} & 0 & 4-3c_\vartheta^2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & \frac{1}{2}0 \\ \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & s_\vartheta^2 & 0 \\ \frac{1}{2}0 & 0 & 4-3c_\vartheta^2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \tfrac{1}{s_\vartheta^4(4-3c_\vartheta^2)^2}\left(\det\begin{pmatrix} -c_{2\vartheta} & 0 & -\frac{1}{2}s_{2\vartheta} \\ 0 & s_\vartheta^2 & 0 \\ \frac{3}{2}s_{2\vartheta} & 0 & 4-3c_\vartheta^2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & 0 \\ \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & s_\vartheta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-3c_\vartheta^2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \tfrac{1}{s_\vartheta^4(4-3c_\vartheta^2)^2}\left(s_\vartheta^2\det\begin{pmatrix} -c_{2\vartheta} & -\frac{1}{2}s_{2\vartheta} \\ \frac{3}{2}s_{2\vartheta} & 4-3c_\vartheta^2 \end{pmatrix} - (4-3c_\vartheta^2)\det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}s_{2\vartheta} \\ \frac{1}{2}s_{2\vartheta} & s_\vartheta^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{s_\vartheta^4(4-3c_\vartheta^2)^2}\left(s_\vartheta^2(-4c_{2\vartheta}+3c_\vartheta^2c_{2\vartheta}+\tfrac{3}{4}s_{2\vartheta}^2)+\tfrac{1}{4}(4-3c_\vartheta^2)s_{2\vartheta}^2\right)\\
&= \tfrac{1}{s_\vartheta^4(4-3c_\vartheta^2)^2}\left(s_\vartheta^2(-4c_\vartheta^2+4s_\vartheta^2+3c_\vartheta^4-3c_\vartheta^2s_\vartheta^2+3s_\vartheta^2c_\vartheta^2)+(4-3c_\vartheta^2)s_\vartheta^2c_\vartheta^2\right)\\
&= \tfrac{1}{s_\vartheta^4(4-3c_\vartheta^2)^2}\left(-4s_\vartheta^2c_\vartheta^2+4s_\vartheta^4+3c_\vartheta^4s_\vartheta^2+4s_\vartheta^2c_\vartheta^2-3c_\vartheta^4s_\vartheta^2\right)\\
&= \tfrac{1}{s_\vartheta^4(4-3c_\vartheta^2)^2}\left(4s_\vartheta^4\right)\\
&= \tfrac{4}{(4-3c_\vartheta^2)^2}\ .
\end{aligned}
$$

Dies bestätigt das Theorema egregium im vorliegenden Fall.

Hausaufgabe 18 Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$, eine Kugel S von Radius 1.
Wir betrachten das Viereck

$$J \;:=\; \{\, \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right) \mid \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \vartheta \in [\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}] \} \;\subseteq\; U \;=\; [0, 2\pi] \times [0, \pi]\ .$$

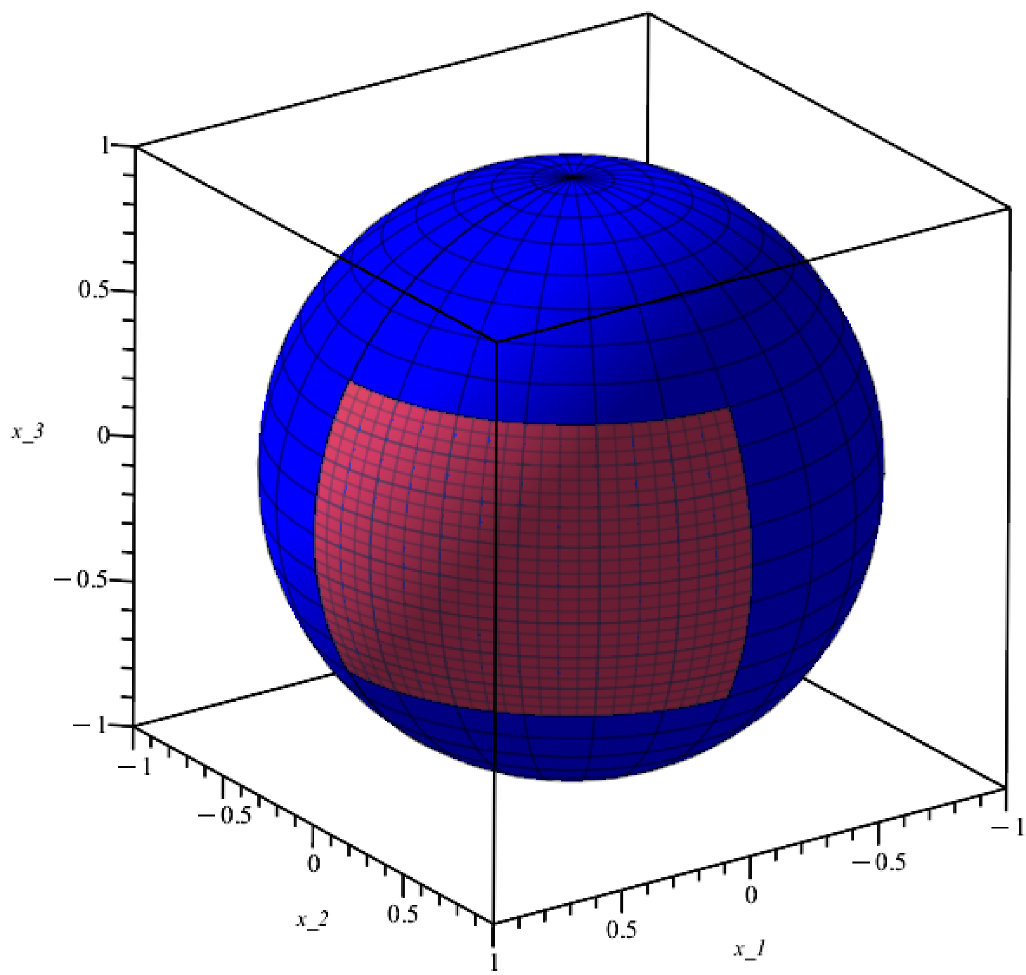
Dann ist $\Phi(J)$ ein krummliniges Viereck auf der Kugel S.

(a) Man skizziere $\Phi(J)$ auf S.

(b) Man bestätige Gauß-Bonnet, Version 1, im vorliegenden Fall.

Lösung.
Wir schreiben $A := \Phi(J)$.

(a) Skizze von $A = \Phi(J)$ (rot) auf S (blau).



(b) Wir parametrisieren den Rand des Vierecks

$$J \;=\; \{\, \left(\begin{smallmatrix}\varphi\\ \vartheta\end{smallmatrix}\right) \mid \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \vartheta \in [\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}]\} \;\subseteq\; U \;=\; [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

wie folgt.

Sei $c_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Sei $c_{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3}+t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

Sei $c_{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}-t \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Sei $c_{(4)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\pi}{3}-t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

Es sind $\alpha_{(1)} = \alpha_{(2)} = \alpha_{(3)} = \alpha_{(4)} = \frac{\pi}{2}$, da Längenkreise und Breitenkreise immer einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ einschließen.

Es ist

$$|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta| \;=\; \sin(\vartheta)\ ;$$

vgl. erstes Beispiel in §3.4.

Es ist $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \frac{1}{1^2} = 1$; vgl. erstes Beispiel in §3.1.

Damit wird

$$\begin{aligned}
\textstyle\iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\, \mathrm{d}O \;&=\; \textstyle\iint_A 1\mathrm{d}O \\
&=\; \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 1 \cdot |\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta|\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \\
&=\; \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \\
&=\; \tfrac{\pi}{2}[-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=\frac{\pi}{3}}^{\vartheta=\frac{2\pi}{3}} \\
&=\; \tfrac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

Für $c_{(2)}$, $c_{(4)}$ ist $\cos(\beta) = 0$, da wir uns auf Geodäten der Kugel bewegen.

Für $c_{(1)}$ wird $C_{(1)}(t) = \Phi(c_{(1)}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(t) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(t) \\ \sqrt{3}\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $c_{(1)}$ ist also $\kappa = (\frac{1}{2}\sqrt{3})^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, da wir uns auf einem Breitenkreis von Radius $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ bewegen.

Dort zeigt $\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta$ zum Kugelmittelpunkt. Es liegt n in der Ebene $x_3 = \frac{1}{2}$. Es läuft die von $C_{(1)}(t)$ parametrisierte Kurve dem Breitenkreis entlang von $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Also zeigt $b = v \times n$ positiv in Richtung der x_3-Achse.

Für $c_{(1)}$ ist folglich $\beta = \frac{2\pi}{3}$ und also $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}$.

Es ist $C'_{(1)}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}(-\sin(t)) \\ \sqrt{3}\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und also $|C'_{(1)}(t)| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Für $c_{(3)}$ wird $C_{(3)}(t) = \Phi(c_{(3)}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}-t) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2}-t) \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(t) \\ \sqrt{3}\cos(t) \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für $c_{(3)}$ ist also $\kappa = (\frac{1}{2}\sqrt{3})^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, da wir uns auf einem Breitenkreis von Radius $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ bewegen.

Dort zeigt $\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta$ zum Kugelmittelpunkt. Es liegt n in der Ebene $x_3 = -\frac{1}{2}$. Es läuft die von $C_{(3)}(t)$ parametrisierte Kurve dem Breitenkreis entlang von $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ nach $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Also zeigt $b = v \times n$ negativ in Richtung der x_3-Achse.

Für $c_{(3)}$ ist folglich $\beta = \frac{2\pi}{3}$ und also $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}$.

Es ist $C'_{(3)}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(t) \\ \sqrt{3}(-\sin(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$ und also $|C'_{(3)}(t)| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Somit wird

$$\int_{\partial A} \kappa \cdot \cos(\beta)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\;\mathrm{d}t + 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\;\mathrm{d}t + 0 \;=\; -\frac{\pi}{2}\ .$$

Insgesamt wird

$$\iint_A \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\;\mathrm{d}O \;+\; \sum_{j=1}^{4} \alpha_{(j)} \;+\; \int_{\partial A} \kappa \cdot \cos(\beta)\,\mathrm{d}s \;=\; \frac{\pi}{2} + 2\pi + (-\tfrac{\pi}{2}) \;=\; 2\pi\ .$$

Dies bestätigt Gauß-Bonnet, Version 1, im vorliegenden Fall.