Künzer 16.02.2024

Differentialgeometrie für Geodäten

Scheinklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.

Lösungswege werden gewertet und sind mit abzugeben. Bitte nehmen Sie Ihre Bearbeitung auf separaten Blättern vor und legen Sie diese am Ende in den Umschlagbogen ein.

Aufgabe 1 (1+4+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(t) \;=\; \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $t \in \mathbb{R}$.

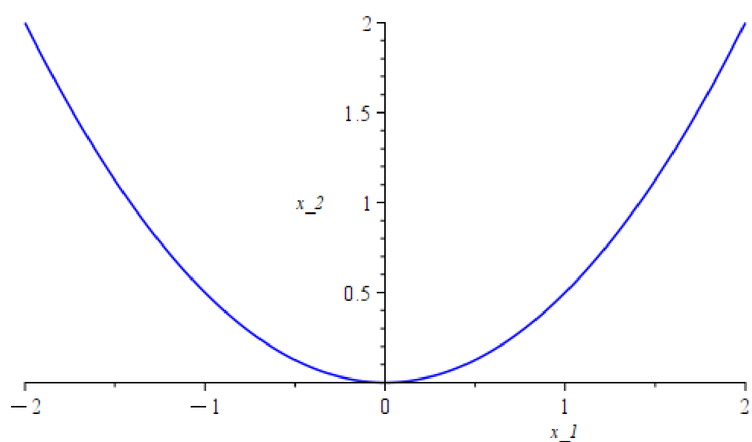
(a) Skizzieren Sie diese Kurve im Bereich $t \in [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie für diese Kurve den Krümmungskreisradius $\rho(t)$ und den Mittelpunkt des Krümmungskreises $M(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Fügen Sie den Krümmungskreis an der Stelle $t = 0$ der Skizze aus (a) hinzu.

Lösung.

(a) In der x_1-x_2-Ebene erhalten wir für $t \in [-2, 2]$ folgende Skizze der Kurve (blau).



(b) Es wird

$$C'(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C''(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also wird

$$C'(t) \times C''(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\rho(t) \;=\; \frac{|C'(t)|^3}{|C'(t)\times C''(t)|} \;=\; \frac{(\sqrt{1+t^2})^3}{1} \;=\; (1+t^2)^{3/2}$$

Es wird

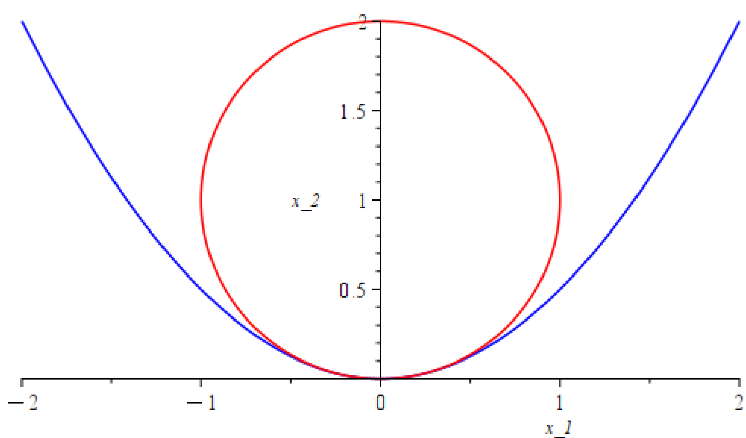
$$\begin{aligned} n(t) &= \tfrac{1}{|C'(t)\times C''(t)|}(|C'(t)|C''(t) - |C'(t)|'C'(t)) \\ &= \tfrac{1}{1}((1+t^2)^{1/2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) - \tfrac{1}{2}(1+t^2)^{-1/2}\cdot 2t\left(\begin{smallmatrix}1\\t\\0\end{smallmatrix}\right)) \\ &= (1+t^2)^{-1/2}((1+t^2)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) - t\left(\begin{smallmatrix}1\\t\\0\end{smallmatrix}\right)) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(\begin{smallmatrix}0\\1+t^2\\0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}t\\t^2\\0\end{smallmatrix}\right)) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(\begin{smallmatrix}-t\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\;. \end{aligned}$$

Somit ist

$$M(t) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}t\\\frac{1}{2}t^2\\0\end{smallmatrix}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(\begin{smallmatrix}-t\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\cdot(1+t^2)^{3/2} \;=\; \left(\begin{smallmatrix}t\\\frac{1}{2}t^2\\0\end{smallmatrix}\right) + (1+t^2)\left(\begin{smallmatrix}-t\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}-t^3\\1+\frac{3}{2}t^2\\0\end{smallmatrix}\right)\;.$$

(c) Der Krümmungskreis an der Stelle $t = 0$ hat gemäß (b) den Radius $\rho(0) = 1$ und den Mittelpunkt $M(0) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

Er wurde der Skizze aus (a) hinzugefügt (rot):



Aufgabe 2 (2+4+1+2 = 9 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ u^2-v^3 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Es parametrisiert Φ die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Man bestimme Φ_u, Φ_v, Φ_{uu}, Φ_{uv}, Φ_{vv} und $\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_v$.

(b) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$ bei $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ von S an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Man bestimme die Weingarten-Matrix W im Punkt $P_0 = \Phi(0,0)$, also bei $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Man bestimme die Hauptkrümmungen an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung.

(a) Es wird

$$\Phi_u \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} , \qquad \Phi_v \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3v^2 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\Phi_{uu} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad \Phi_{uv} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \Phi_{vv} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6v \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\mathfrak{n} \;=\; \Phi_u \times \Phi_v \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3v^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2u \\ 3v^2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Mit (a) wird

$$E \;=\; \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle \;=\; 1{+}4u^2 , \qquad F \;=\; \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle \;=\; -6uv^2 , \qquad G \;=\; \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle \;=\; 1{+}9v^4 .$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1{+}4u^2 & -6uv^2 \\ -6uv^2 & 1{+}9v^4 \end{pmatrix} .$$

Mit (a) wird

$$\langle \Phi_{uu} | \mathfrak{n} \rangle \;=\; 2 , \qquad \langle \Phi_{uv} | \mathfrak{n} \rangle \;=\; 0 , \qquad \langle \Phi_{vv} | \mathfrak{n} \rangle \;=\; -6v .$$

Desweiteren ist $EG - F^2 = (1+4u^2)(1+9v^4) - (-6uv^2)^2 = 1 + 4u^2 + 9v^4$.

Alternativ wird auch $EG - F^2 = |\Phi_u \times \Phi_v|^2 \;=\; |\mathfrak{n}|^2 \;=\; 1 + 4u^2 + 9v^4$; vgl. §2.1.

Also ist

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{EG{-}F^2}} \begin{pmatrix} \langle \Phi_{uu} | \mathfrak{n} \rangle & \langle \Phi_{uv} | \mathfrak{n} \rangle \\ \langle \Phi_{vu} | \mathfrak{n} \rangle & \langle \Phi_{vv} | \mathfrak{n} \rangle \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1{+}4u^2{+}9v^4}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6v \end{pmatrix} .$$

(c) Es wird

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} \;=\; \frac{LN{-}M^2}{EG{-}F^2} \;=\; \frac{\frac{-12v}{1+4u^2+9v^4}}{1{+}4u^2{+}9v^4} \;=\; \frac{\frac{-12v}{1+4u^2+9v^4}}{1{+}4u^2{+}9v^4} \;=\; \frac{-12v}{(1{+}4u^2{+}9v^4)^2} .$$

(d) An der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dank (c). Also ist dort

$$\mathrm{W} \;=\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Hauptkrümmungen sind die Eigenwerte von W, also 2 und 0.

Aufgabe 3 (4+1+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Kurve, die durch

$$C(t) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist, wobei $t \in [0, 2\pi]$.

Für Berechnungen kann $\mathrm{s}_t := \sin(t)$ und $\mathrm{c}_t := \cos(t)$ abgekürzt werden.

(a) Man bestimme den Tangentenvektor $v(t)$, den Normalenvektor $n(t)$ und den Binormalenvektor $b(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Man bestimme die Krümmung $\kappa(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(c) Man bestimme die Torsion $\tau(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

Lösung.
Vorbereitend ist

$$C(t) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{c}_t \\ \mathrm{c}_t \\ \mathrm{s}_t \end{pmatrix}, \qquad C'(t) \;=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t \end{pmatrix}, \qquad C''(t) \;=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t \end{pmatrix}, \qquad C'''(t) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{s}_t \\ \mathrm{s}_t \\ -\mathrm{c}_t \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist

$$|C'(t)| \;=\; \sqrt{2\mathrm{s}_t^2 + \mathrm{c}_t^2} \;=\; \sqrt{1 + \mathrm{s}_t^2}\,.$$

Also wird

$$v(t) \;=\; \frac{C'(t)}{|C'(t)|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{s}_t^2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t \end{pmatrix}.$$

Ferner wird

$$C'(t) \times C''(t) \;=\; \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $|C'(t) \times C''(t)| = \sqrt{2}$. Damit wird

$$\begin{aligned}
n(t) \;&=\; \tfrac{1}{|C'(t)\times C''(t)|}\big(|C'(t)|C''(t) - |C'(t)|'C'(t)\big) \\
&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big((1 + \mathrm{s}_t)^{1/2} \begin{pmatrix} -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{s}_t^2)^{-1/2} \cdot 2\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t \end{pmatrix}\Big) \\
&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}(1+\mathrm{s}_t^2)^{1/2}}\Big((1 + \mathrm{s}_t^2) \begin{pmatrix} -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t \end{pmatrix} - \mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_t \\ -\mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t \end{pmatrix}\Big) \\
&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}(1+\mathrm{s}_t^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{c}_t - \mathrm{s}_t^2\,\mathrm{c}_t + \mathrm{s}_t^2\,\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{c}_t - \mathrm{s}_t^2\,\mathrm{c}_t + \mathrm{s}_t^2\,\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{s}_t - \mathrm{s}_t\mathrm{s}_t^2 - \mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t^2 \end{pmatrix} \\
&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}(1+\mathrm{s}_t^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{c}_t \\ -\mathrm{c}_t \\ -2\mathrm{s}_t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$b(t) \;=\; \frac{C'(t)\times C''(t)}{|C'(t)\times C''(t)|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es wird

$$\kappa(t) \;=\; \frac{|C'(t)\times C''(t)|}{|C'(t)|^3} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{(1+\mathrm{s}_t^2)^{3/2}}\,.$$

(c) Es wird

$$\tau(t) \;=\; \frac{1}{|C'(t)\times C''(t)|^2}\,\det(C'(t),C''(t),C'''(t)) \;=\; \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -\mathrm{s}_t & -\mathrm{c}_t & \mathrm{s}_t \\ -\mathrm{s}_t & -\mathrm{c}_t & \mathrm{s}_t \\ \mathrm{c}_t & -\mathrm{s}_t & -\mathrm{c}_t \end{pmatrix} \;=\; 0\;,$$

da die ersten beiden Zeilen dieser Matrix übereinstimmen.

Aufgabe 4 (3+3+2 = 8 Punkte)
Sei $U := [0, 2\pi] \times (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Es parametrisiert

$$\Phi \ : \ U \to \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(\varphi, z) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(z) \\ \sin(\varphi)\cos(z) \\ z \end{pmatrix}$$

die Rotationsfläche S, die durch Rotation des Graphen der Cosinus-Funktion um die x_3-Achse entsteht.

Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in I = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Wir betrachten die Kurve K auf S, die durch $\Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

Für Berechnungen kann $\mathrm{s}_\varphi := \sin(\varphi)$, $\mathrm{c}_\varphi := \cos(\varphi)$ usw. abgekürzt werden.

(a) Man bestimme die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} E_z & F_z \\ F_z & G_z \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Man bestimme die Matrizen Γ^1 und Γ^2, die die Christoffelsymbole enthalten, für $\left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ z \end{smallmatrix}\right) \in U$.

(c) Ist $K = \Phi(c(I))$ eine Geodäte auf S?

Lösung.

(a) Es ist

$$\Phi \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{c}_\varphi \, \mathrm{c}_z \\ \mathrm{s}_\varphi \, \mathrm{c}_z \\ z \end{pmatrix} , \qquad \Phi_\varphi \ = \ \begin{pmatrix} -\mathrm{s}_\varphi \, \mathrm{c}_z \\ \mathrm{c}_\varphi \, \mathrm{c}_z \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \Phi_z \ = \ \begin{pmatrix} -\mathrm{c}_\varphi \, \mathrm{s}_z \\ -\mathrm{s}_\varphi \mathrm{s}_z \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$E \ = \ \langle \Phi_\varphi | \Phi_\varphi \rangle \ = \ \mathrm{c}_z^2 \ , \qquad F \ = \ \langle \Phi_\varphi | \Phi_z \rangle \ = \ 0 \ , \qquad G \ = \ \langle \Phi_z | \Phi_z \rangle \ = \ \mathrm{s}_z^2 + 1 \ .$$

Somit ist

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{c}_z^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_z^2+1 \end{pmatrix} , \qquad \left(\begin{smallmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{smallmatrix}\right) \ = \ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) , \qquad \left(\begin{smallmatrix} E_z & F_z \\ F_z & G_z \end{smallmatrix}\right) \ = \ \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{c}_z\,\mathrm{s}_z & 0 \\ 0 & 2\mathrm{s}_z\,\mathrm{c}_z \end{pmatrix} = 2\mathrm{s}_z\,\mathrm{c}_z \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

(b) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{c}_z^{-2} & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} \ = \ \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\varphi \\ F_\varphi - \frac{1}{2}E_z \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{c}_z^{-2} & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{c}_z\,\mathrm{s}_z \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{c}_z\,\mathrm{s}_z(\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} \ = \ \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_z \\ \frac{1}{2}G_\varphi \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{c}_z^{-2} & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\,\mathrm{c}_z\,\mathrm{s}_z \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -\,\mathrm{c}_z^{-1}\,\mathrm{s}_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} \ = \ \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_z - \frac{1}{2}G_\varphi \\ \frac{1}{2}G_z \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{c}_z^{-2} & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{s}_z\,\mathrm{c}_z \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{s}_z\,\mathrm{c}_z(\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} .$$

Zusammen ist also

$$\Gamma^1 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -\,\mathrm{c}_z^{-1}\,\mathrm{s}_z \\ -\,\mathrm{c}_z^{-1}\,\mathrm{s}_z & 0 \end{pmatrix} \ = \ -\,\mathrm{c}_z^{-1}\,\mathrm{s}_z \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\Gamma^2 \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{c}_z\,\mathrm{s}_z(\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_z\,\mathrm{c}_z(\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} \ = \ \mathrm{s}_z\,\mathrm{c}_z(\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

(c) Wir prüfen die Geodäten-Bedingung.

Es ist $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \binom{0}{t}$. Es ist $c'(t) = \binom{0}{1}$. Es ist $c''(t) = \binom{0}{0}$.

Einsetzen von $c(t) = \binom{0}{t}$ für $\binom{\varphi}{z}$ gibt ferner

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_t^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_t^2+1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_z & F_z \\ F_z & G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{c}_t\,\mathrm{s}_t & 0 \\ 0 & 2\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t \end{pmatrix}.$$

und

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\,\mathrm{c}_t^{-1}\,\mathrm{s}_t \\ -\,\mathrm{c}_t^{-1}\,\mathrm{s}_t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_t\,\mathrm{s}_t(\mathrm{s}_t^2+1)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t(\mathrm{s}_t^2+1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} & c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \frac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{pmatrix} c' \cdot c_1' + \frac{1}{2}\, c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_z & F_z \\ F_z & G_z \end{pmatrix} c' \cdot c_2' \right) \cdot c' \\ = \; & \binom{0}{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t(\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} - \frac{1}{\mathrm{s}_t^2+1} \left(0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t \cdot 1\right) \cdot \binom{0}{1} \\ = \; & \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t(\mathrm{s}_z^2+1)^{-1} \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{s}_t\,\mathrm{c}_t}{\mathrm{s}_t^2+1} \binom{0}{1} \\ = \; & \binom{0}{0}. \end{aligned}$$

Somit ist $K = \Phi(c(I))$ eine Geodäte auf S.
