Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 1

Platzaufgaben

Platzaufgabe 1 Sei $T := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 2 \}$.

(a) Skizzieren Sie T in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(b) Begründen Sie, dass T ein Normalbereich bezüglich der x-Achse ist.
Berechnen Sie

$$\iint_T x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\int_{g(x)}^{h(x)} x + y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

mit geeigneten Funktionen $g(x)$ und $h(x)$.

(c) Begründen Sie, dass T ein Normalbereich bezüglich der y-Achse ist.
Berechnen Sie

$$\iint_T x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_{g(y)}^{h(y)} x + y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

mit geeigneten Funktionen $g(y)$ und $h(y)$.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c).

Platzaufgabe 2 Wir betrachten die Kurve $K := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1,\ y \geqslant 0 \}$.

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Stellen Sie K als Graph einer Funktion $r(x)$ auf $[0, 2]$ dar.

(c) Lassen Sie die Kurve K um die x-Achse rotieren. Der entstandene Drehkörper E ist ein Ellipsoid. Skizzieren sie E.

(d) Berechnen Sie das Volumen von E.

Platzaufgabe 3 Sei $T := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, von der T berandet wird. Zerlegen Sie K in drei Teilkurven und parametrisieren Sie diese positiv orientiert.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \binom{x_2}{-x_1}$.

(a) Skizzieren Sie T.

(b) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(c) Berechnen Sie $\iint_T \operatorname{rot} g(x) \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso — Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 1

Hausaufgaben

Abgabe bis Do 02.11.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 31.10.23 im Ilias.

Hausaufgabe 1 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2,\ y \leqslant x,\ x^2 \leqslant 4y \}$.

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der x-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(c) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Hausaufgabe 2
Sei $K_1 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 = 1,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \}$.
Sei $K_2 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 = 2,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \}$.

(a) Skizzieren Sie K_1 und K_2 in ein Koordinatensystem.

(b) Sei R_1 der Drehkörper, der durch Rotation von K_1 um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen V_1 von R_1.

(c) Sei R_2 der Drehkörper, der durch Rotation von K_2 um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen V_2 von R_2.

(d) Sei $R := R_2 \smallsetminus R_1$ die Schale, die aus R_2 durch Herausnahme von R_1 entsteht.
Berechnen Sie das Volumen V der Schale R.

Hausaufgabe 3
Sei $D := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei K die geschlossene Kurve, von der D berandet wird, positiv orientiert parametrisiert.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1^2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(c) Berechnen Sie $\iint_D \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Wer in einer Mittwochsgruppe ist, kann statt am Mi 01.11.23 in die Ersatz-Übungen gehen: am Di 31.10.23 oder am Fr 03.11.23 jeweils um 13:00–15:30 in V57.8.122.