Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 2

Platzaufgaben

Platzaufgabe 4 Sei $J := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet. Sei K positiv orientiert parametrisiert.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) := \binom{2x_2^2}{x_1 x_2}$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(b) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und aus (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Platzaufgabe 5 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ \ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \}$.

(a) Skizzieren Sie D im x-y-Koordinatensystem.

(b) Sei ψ die Polarkoordinatentransformation, sei also $\psi(r, \varphi) = \binom{r\cos(\varphi)}{r\sin(\varphi)}$.
Bestimmen Sie $B \subseteq \{ \binom{r}{\varphi} \in \mathbb{R}^2 \mid r \geqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi] \}$ mit $\psi(B) = D$.
Skizzieren Sie B im r-φ-Koordinatensystem.

(c) Bestimmen Sie das Integral
$$\iint_D xy(x^2 + y^2)^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$
mittels einer Substitution unter Verwendung von (b).

Platzaufgabe 6

Sei $B := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \}$.
Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{u}{v} \mapsto \psi(u, v) = \binom{u}{u^2 + 2v}$.
Sei $D := \psi(B)$.

(a) Skizzieren Sie B im u-v-Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie $\psi(0, 0)$, $\psi(\frac{1}{2}, 0)$, $\psi(1, 0)$. Bestimmen Sie $\psi(0, 1)$, $\psi(\frac{1}{2}, 1)$, $\psi(1, 1)$.
Skizzieren Sie D im x-y-Koordinatensystem.

(c) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $|\det \mathrm{J}\psi(u, v)|$.

(d) Bestimmen Sie das Integral
$$\iint_D x^2 - y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$
mittels einer Substitution unter Verwendung von ψ.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 2

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 08.11.23 / Do 09.11.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 07.11.23 im Ilias.

Hausaufgabe 4 Sei $J := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_2 \geqslant 0 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet. Sei K positiv orientiert parametrisiert.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) := \binom{2x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2}$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(b) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und aus (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Hausaufgabe 5 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \leqslant 0 \}$.

(a) Verwenden Sie die Polarkoordinatentransformation ψ.
Finden Sie $B \subseteq \{ \binom{r}{\varphi} \in \mathbb{R}^2 \mid r \geqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi] \}$ mit $\psi(B) = D$.

(b) Skizzieren Sie B im r-φ-Koordinatensystem. Skizzieren Sie D im x-y-Koordinatensystem.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_D \frac{4}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

mittels einer Substitution unter Verwendung von ψ.

Hausaufgabe 6
Sei $B := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant 2 \}$.
Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{u}{v} \mapsto \psi(u, v) = \binom{u+2v}{u-2v}$. Sei $D := \psi(B) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie D in der x-y-Ebene.

(b) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $|\det \mathrm{J}\psi(u, v)|$.

(c) Berechnen Sie $\iint_D x \cos(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.