Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 7 Sei $S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \right\}$.

(a) Skizzieren Sie S als Teilmenge einer Kugeloberfläche.

(b) Wir betrachten die Kugelkoordinatenabbildung

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Finden Sie eine Teilmenge $J \subseteq [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ mit $\Phi(J) = S$.

(c) Bestimmen Sie $\Phi_\varphi(\varphi, \vartheta)$, $\Phi_\vartheta(\varphi, \vartheta)$ und $\Phi_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi, \vartheta)$. Siehe auch §2.1.2.

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S als

$$\mathrm{F}(S) = \iint_J |\Phi_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi, \vartheta)| \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, .$$

Platzaufgabe 8 Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u + v \leqslant 1 \}$.
Sei $\Phi : J \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(u, v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 1-u-v \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Sei $S := \Phi(J)$. Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto h(x, y, z) = z$. Berechnen Sie

$$\iint_S h \, \mathrm{d}O.$$

Platzaufgabe 9 Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leqslant 1 \}$.
Sei $\Phi : J \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(u, v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 2-u^2-v^2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Sei $S := \Phi(J)$. Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) Markieren Sie den Punkt $\Phi(0, 0)$ in der Skizze von S aus (b) und zeichnen Sie daran ansetzend die Vektoren $\Phi_u(0, 0)$, $\Phi_v(0, 0)$ und $\Phi_u(0, 0) \times \Phi_v(0, 0)$ ein.

(d) Sei $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$ eine Parametrisierung des Randes von J.

Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)(t)$. Es parametrisiert $\Phi \circ C$ den Rand ∂S von S.

Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)'(t)$. Markieren Sie den Punkt $(\Phi \circ C)(0)$ in der Skizze von S aus (b) und zeichnen Sie daran ansetzend den Vektor $(\Phi \circ C)'(0)$ ein.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 15.11.23 / Do 16.11.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 14.11.23 im Ilias.

Hausaufgabe 7 Sei

$$S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x+y),\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

(a) Geben Sie eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $\Phi : J \to \mathbb{R}^3$ an mit $\Phi(J) = S$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{F}(S)$.

Hausaufgabe 8 Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{4} \}$.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(v) \\ \mathrm{e}^{2u} \\ \sin(v) \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $\Phi_u(u,v)$, $\Phi_v(u,v)$ und $\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)$.

(b) Sei $S := \Phi(J)$. Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto h(x,y,z) = y(x^2+z^2)$.
Berechnen Sie
$$\iint_S h \, \mathrm{d}O.$$

Hausaufgabe 9 Sei $D := [0, 2\pi] \times [0, 3]$. Sei $\Phi : D \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ z \end{smallmatrix}\right)$.
Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ z \end{smallmatrix}\right) \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ \varphi^2 \leqslant z \leqslant \frac{\pi^2}{4} \} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei $S := \Phi(J) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Skizzieren Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie $\Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ und darin $\Phi(J) = S$.

(b) Bestimmen Sie $\Phi_\varphi(\frac{\pi}{4}, 1) \times \Phi_z(\frac{\pi}{4}, 1)$.
Zeichnen Sie diesen Vektor in die Skizze aus (a) ein, angesetzt an $\Phi(\frac{\pi}{4}, 1)$.

(c) Es parametrisiert $C : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right)$ ein Stück des Randes von J.
Es parametrisiert $(\Phi \circ C)(t)$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ein Stück des Randes ∂S von S.
Bestimmen Sie $(\Phi \circ C)'(t)$ und $(\Phi \circ C)'(\frac{\pi}{4})$.
Zeichnen Sie diesen Vektor in die Skizze aus (a) ein, angesetzt an $(\Phi \circ C)(\frac{\pi}{4})$.