Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 4

Platzaufgaben

Platzaufgabe 10 Sei $J := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u,\ 0 \leqslant v,\ u+v \leqslant 1 \}$.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{u}{v} \mapsto \Phi(u,v) := \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1-u-v \end{pmatrix}$. Sei $S := \Phi(J)$.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Dreieck $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$ und $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen Φ_u und Φ_v , sowie $\Phi_u \times \Phi_v$.

(c) Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung stückweise mit Funktionen C_j .

(d) Bestimmen Sie die Funktionen $(\Phi \circ C_j)(t)$ und deren Ableitungen $(\Phi \circ C_j)'(t)$.

(e) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ unter Verwendung von (d).

(f) Berechnen Sie das Flächenintegral $\iint_S \operatorname{rot}(g) \bullet n \,\mathrm{d}O$.

(g) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (e) und (f) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Platzaufgabe 11 Wir betrachten den Kegelstumpf

$$K := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [1,2],\ x^2+y^2 \leqslant z^2 \} .$$

Sei ζ die Transformation in Zylinderkoordinaten, also $\zeta(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$. Siehe 2.3.6.

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Bestimmen Sie $J \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\zeta(J) = K$.

(c) Berechnen Sie $\iiint_K \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ unter Verwendung von ζ und der Transformationsformel.

Platzaufgabe 12 Wir betrachten den Zylinder $Z := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,3],\ x^2+y^2 \leqslant 1 \}$.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie den Zylinder Z.

(b) Berechnen Sie $\iiint_Z \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ als Volumenintegral.

(c) Berechnen Sie $\iint_{\partial Z} g \bullet n \,\mathrm{d}O$ als Flächenintegral.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 4

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 22.11.23 / Do 23.11.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 21.11.23 im Ilias.

Hausaufgabe 10 Sei $S := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqslant x_1,\ 0 \leqslant x_2,\ 0 \leqslant x_3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$.

Wir verwenden die Parametrisierung $\Phi(\varphi, \vartheta) := \left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{smallmatrix}\right)$.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x_1, x_2, x_3) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(J) = S$. Parametrisieren Sie den Rand von J in positiver Orientierung stückweise mit Funktionen C_j .

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie das Flächenintegral $\iint_S \mathrm{rot}(g) \bullet n \, \mathrm{d}O$.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Hausaufgabe 11 Wir betrachten den Pyramidenstumpf

$$P := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [1, 2],\ x \in [-z, z],\ y \in [-z, z] \} .$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \psi(u, v, z) := \left(\begin{smallmatrix} zu \\ zv \\ z \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie P.

(b) Bestimmen Sie $J \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\psi(J) = P$.

(c) Berechnen Sie $|\det \mathrm{J}\psi(u, v, z)|$.

(d) Berechnen Sie $\iiint_P x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ unter Verwendung von ψ und der Transformationsformel.

Hausaufgabe 12 Wir betrachten den Kegel $K := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [0, 2],\ x^2 + y^2 \leqslant z^2 \}$.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x, y, z) := \left(\begin{smallmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Skizzieren Sie den Kegel K.

(b) Berechnen Sie $\iiint_K \mathrm{div}\, g \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ als Volumenintegral unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

(c) Berechnen Sie $\iint_{\partial K} g \bullet n \, \mathrm{d}O$ als Flächenintegral.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Am Mi 22.11.2023 finden Vortragsübung und Vorlesung in M 17.01 statt.