Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Platzaufgaben

Platzaufgabe 16 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung.

$$y^{(2)} + 4y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \sin(2x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Finden sie zwei Lösungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ so, dass für $x_0 = \frac{\pi}{8}$ gilt:

$$f_1(x_0) = 1 \qquad f_2(x_0) = 0$$
$$f_1'(x_0) = 0 \qquad f_2'(x_0) = 1.$$

(c) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(\frac{\pi}{8})$ für f_1, f_2.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit dem Anfangswerten $y(\frac{\pi}{8}) = 2$ und $y'(\frac{\pi}{8}) = 3$.

Platzaufgabe 17 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 0$$

für $x > 0$.

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = 2$ und $h(x) = \ln(x)$ Lösungen auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind.

(b) Berechnen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$ im Punkt $x_0 = 1$ für g, h.

(c) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante $\det \mathrm{W}(1)$. Entscheiden Sie, ob g, h ein Fundamentalsystem ist.

(d) Bestimmen Sie die Inverse $\mathrm{W}(1)^{-1}$ der Wronski-Matrix.

(e) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit dem Anfangswerten $y(1) = 2$ und $y'(1) = 1$.

Platzaufgabe 18 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

$$y''' - y' = 0$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ der Differentialgleichung. Berechnen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ und $y''(0) = 1$.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 06.12.23 / Do 07.12.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 05.12.23 im Ilias.

Hausaufgabe 16 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = x + 1$ Lösungen auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind.

(b) Finden sie zwei Lösungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ so, dass bei $x_0 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 1 & \qquad f_2(1) &= 0 \\ f_1'(1) &= 0 & \qquad f_2'(1) &= 1. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$ für g, h. Bestimmen Sie ihre Inverse $\mathrm{W}(1)^{-1}$.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit dem Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 2$.

Hausaufgabe 17 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

(a) Überprüfen Sie, dass $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $h(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Berechnen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$ für g, h. Entscheiden Sie, ob g, h ein Fundamentalsystem ist.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit dem Anfangswerten $y(1) = 2$ und $y'(1) = 1$.

Hausaufgabe 18 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 11y^{(1)} - 6y = 0$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$. Berechnen Sie $p(1)$. Berechnen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und die zugehörige Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ und $y''(0) = 5$.