

## Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

**Blatt 7**

## Platzaufgaben

**Platzaufgabe 19**

$$y''' - 2y' - 4y = 0$$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom  $p(X)$  der Differentialgleichung. Berechnen Sie  $p(2)$ .
- Berechnen Sie alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- Bestätigen Sie unter Verwendung der Wronski-Matrix  $W(0)$  nochmals, dass es sich um ein Fundamentalsystem handelt.

**Platzaufgabe 20**

- Berechnen Sie  $D^2(e^{-x} \cdot \ln(x))$ .
- Berechnen Sie  $e^{-x} \cdot (D - 1)^2(\ln(x))$ .
- Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall die Verschiebungsregel von Heaviside.

**Platzaufgabe 21** Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x$$

auf  $\mathbb{R}_{>0}$ .

- Sei  $f_1(x) = x$ . Sei  $f_2(x) = x^2$ . Überprüfen Sie:  $f_1$  und  $f_2$  sind Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie für  $f_1, f_2$  die Wronskimatrix  $W(x)$ . Überprüfen Sie:  $f_1, f_2$  ist ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- Wir suchen eine partikuläre Lösung  $f_p(x)$  der inhomogenen Differentialgleichung. Dafür setzen wir an:  $f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$ .  
Bestimmen Sie  $c_1'(x)$  und  $c_2'(x)$  unter Verwendung von  $W(x)^{-1}$ .  
Bestimmen Sie  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$ . Bestimmen Sie  $f_p(x)$ .
- Bestimmen Sie alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung.

## Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

**Blatt 7**

## Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 13.12.23 / Do 14.12.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 12.12.23 im Ilias.

**Hausaufgabe 19** Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 12y^{(1)} - 8y^{(0)} = 0$$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom  $p(X)$  der Differentialgleichung. Berechnen Sie  $p(2)$ . Zerlegen Sie  $p(X)$  in ein Produkt von Linearfaktoren.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- Lösen Sie das Anfangswertproblem mit  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ ,  $y''(1) = 2$ .

**Hausaufgabe 20** Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y^{(2)} - 8y^{(1)} + 4y^{(0)} = 0$$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom  $p(X)$  der Differentialgleichung. Bestimmen Sie  $p(1+i)$ . Bestimmen Sie  $p(1-i)$ . Zerlegen Sie  $p(X)$  in ein Produkt von Linearfaktoren.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y^{(2)} - 8y^{(1)} + 4y^{(0)} = 4x - 8.$$

**Hausaufgabe 21** Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \ln(x)$$

auf  $\mathbb{R}_{>0}$ .

- Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $g(x) = x^\alpha$  eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung?
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung  $f_p(x)$  der inhomogenen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \ln(x) \quad \text{und} \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$$