Künzer, Huber, Barthwal, Winkle, Corso Wintersemester 2023/24

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 8

Platzaufgaben

Platzaufgabe 22 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$(*) \qquad y'' + 5y' + 6y \;=\; 17\,\mathrm{e}^{x}\sin(x)$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ sowie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Verifizieren Sie: Es ist $\mathrm{Im}(17\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}) = 17\,\mathrm{e}^{x}\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $\tilde{f}_{\mathrm{p}}(x)$ der Differentialgleichung

$$(\tilde{*}) \qquad y'' + 5y' + 6y \;=\; 17\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$$

Verwenden Sie hierzu einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

(d) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ der Differentialgleichung $(*)$ unter Verwendung von (c).

Platzaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

(a) $\mathcal{L}((1+t)^2)$

(b) $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{t}\sinh(t))$

(c) $\mathcal{L}(\sin(t)^2)$

(d) $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{3t+1})$

Platzaufgabe 24 Finden Sie zu der jeweils gegebenen Funktion $F(s)$ die Funktion $f(t)$, welche als Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ hat.
Falls erforderlich, führen Sie dazu zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$

(b) $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^2-4}$

(c) $F(s) = \dfrac{2}{4s^2+9}$

(d) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}$

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 8

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 20.12.23 / Do 21.12.23 in den Gruppenübungen oder bis Di 19.12.23 im Ilias.

Hausaufgabe 22 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$(*) \qquad y'' + 2y' + 2y \;=\; \mathrm{e}^{-x}\sin(x) + x^2\cos(x)$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ und ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie partikuläre Lösungen von $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$
und von $y'' + 2y' + 2y = x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $(*)$ unter Verwendung von (b).
Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen von $(*)$.

Hausaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

(a) $\mathcal{L}((3t+1)^2\mathrm{e}^{2t})$

(b) $\mathcal{L}(\mathrm{e}^t\cosh(t)\cos(t))$

(c) $\mathcal{L}(f(t))$, wobei $f(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{für } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leqslant t \end{array}\right\}$ und wobei $s > 0$.

(d) $\mathcal{L}(t^2\cos(t - \frac{\pi}{4}))$

Hausaufgabe 24 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y \;=\; \mathrm{e}^t,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstehenden Gleichung an.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstehenden Ausdruck an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.