

Blatt 9

Platzaufgaben

Platzaufgabe 25 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y' + y = \cosh(t)$$

Wir schreiben $g(t) := \cosh(t)$ für die rechte Seite.

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ von $y' + y = 0$.
- Sei $u(t)$ die Lösung von $y' + y = 0$ mit $y(0) = 1$.
Berechnen Sie $u(t)$ als inverse Laplace-Transformierte von $U(s) = \frac{1}{p(s)}$.
- Wir suchen die Lösung $f(t)$ des Anfangswertproblems $y' + y = \cosh(t)$ mit $y(0) = 0$.
Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung:

$$f(t) = (u * g)(t).$$

Platzaufgabe 26 Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned}$$

- Schreiben Sie dieses System als vektorwertige Differentialgleichung der Form $y' = Ay$ mit einer geeigneten Matrix A .
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix A .
- Verwenden Sie (a), um ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ anzugeben.

Platzaufgabe 27 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$z'' - z' - 2z = 0.$$

- Formen Sie die Differentialgleichung in eine vektorwertige Differentialgleichung erster Ordnung um. Verwenden Sie dazu die Substitution $y_1 = z$, $y_2 = z'$ und finden Sie eine Matrix A , für welche sich folgende vektorwertige Differentialgleichung ergibt.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix A . Bestimmen Sie damit ein Fundamentalsystem von der vektorwertigen Differentialgleichung $y' = Ay$, die in (a) aufgestellt wurde.
Erstellen Sie damit die Wronskimatrix $W_{\text{sys}}(x)$. Berechnen Sie $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $z'' - z' - 2z = 0$ unter Verwendung von (b).
Erstellen Sie damit die Wronskimatrix $W(x)$. Vergleichen Sie mit (b).

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 9

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 10.01.24 / Do 11.01.24 in den Gruppenübungen oder bis Di 09.01.24 im Ilias.

Hausaufgabe 25 Wir betrachten die Differentialgleichung $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} =: g(t)$.

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ von $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Führen Sie für $p(X)$ eine quadratische Ergänzung durch.

Sei $u(t)$ die Lösung von $y'' + 2y' + 5y = 0$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

Berechnen Sie $u(t)$ als inverse Laplace-Transformierte von $U(s) = \frac{1}{p(s)}$.

- (b) Wir suchen die Lösung $f(t)$ des Anfangswertproblems $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$. Berechnen Sie hierzu $f(t) = (u * g)(t)$.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen in die Differentialgleichung und in die Anfangsbedingungen.

Hausaufgabe 26 Wir betrachten die Differentialgleichung $z'' + 6z' + 10z = 0$.

- (a) Formen Sie die Differentialgleichung in eine vektorwertige Differentialgleichung erster Ordnung um. Verwenden Sie dazu die Substitution $y_1 = z$, $y_2 = z'$ und finden Sie eine Matrix A , für welche sich folgende vektorwertige Differentialgleichung ergibt.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen zu $z'' + 6z' + 10z = 0$ unter Verwendung von (b).

Hausaufgabe 27 Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Es ist 2 ein Eigenwert von A . Sei $B := A - 2E_3$. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das minimale $k \geq 0$ mit $B^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

Erstellen Sie damit $W_{\text{sys}}(x)$. Berechnen Sie $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$.

- (c) Sei $b(x) := \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $y' = Ay + b(x)$.